Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s1journaldemat14liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES,

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

Membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes.

TOME XIV. — ANNÉE 1849.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55

1849

QA
1
J684
t.14

20770
c.

TABLE DES MATIÈRES,

TOME XIV.

Pages.

Mémoire sur les simplifications que peuvent apporter les changements de coordonnées dans les questions relatives au mouvement de la chaleur; par M. *J. Bertrand*. 1

Sur une question relative à la théorie des nombres; par M. *Hermite*. 21

Sur l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx$; par M. *Besge*. 31

Sur la convergence des séries qui se présentent dans la théorie du mouvement elliptique des planètes; par M. *Puiseux*. 33

Sur quelques transmutations des lignes courbes; par M. *A. Cayley*. 40

Observation sur une Note de M. Lobatto; par M. *J.-A. Serret*. 47

Mémoire sur les vibrations des gaz dans des tuyaux cylindriques, coniques, etc.; par M. *J.-M.-C. Duhamel*. 49

Mémoire sur la théorie des diamètres rectilignes des courbes quelconques; par M. *L. Wantzel*. 111

Nouvelle méthode pour trouver les conditions d'intégrabilité des fonctions différentielles; par M. *J. Bertrand*. 123

Note relative au Mémoire précédent; par M. *Sarrus*. 131

Remarque sur un Mémoire de M. Bertrand; par M. *J.-A. Serret*. 135

Note sur les polyèdres symétriques de la géométrie; par M. *A. Bravais*. 137

Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique; par M. *A. Bravais*. 141

Mémoire sur l'équation différentielle à laquelle satisfont les séries

$$1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 + \ldots, \quad 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \ldots;$$

par M. *C.-G.-J. Jacobi*. — Traduit par M. *Puiseux*. 181

Sur les équations différentielles de la dynamique réduites au plus petit nombre possible de variables; par M. *Jules Vieille*. 201

Remarques sur une classe d'équations différentielles, à l'occasion d'un Mémoire de M. Jacobi sur quelques séries elliptiques; par M. *J. Liouville*. 225

Seconde Note sur la convergence des séries du mouvement elliptique; par M. *Puiseux*. 242

Sur un problème de géométrie; par M. *Besge*. 247

Remarques sur quelques intégrales définies; par M. *Ossian Bonnet*. 249

Pages.

Mémoire sur l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un nombre quelconque de points matériels; par M. *J. Liouville*. 257

Thèse de Mécanique. — Sur les changements instantanés de vitesse qui ont lieu dans un système de points matériels; par M. *Ed. Phillips*. 300

Sur la rotation d'un corps. — Extrait d'une Lettre adressée à l'Académie des Sciences; par M. *C.-G.-J. Jacobi*. 337

Thèse de Mécanique. — Sur la propagation du son dans un milieu indéfini homogène dans l'état d'équilibre; par M. *Th. Dieu*. 345

Thèse d'Astronomie. — Sur les réfractions atmosphériques; par M. *Th. Dieu*. . . 372

Sur les surfaces isothermes et orthogonales; par M. *Ossian Bonnet*. 401

Note sur les courbes décrites par les différents points d'une ligne droite mobile dont deux points sont assujettis à rester sur des directrices données; par M. *J. de la Gournerie*. 417

Démonstration élémentaire d'une proposition relative aux diviseurs de $x^2 + Ay^2$; par M. *Hermite*. 451

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

MÉMOIRE

Sur les simplifications que peuvent apporter les changements de coordonnées dans les questions relatives au mouvement de la chaleur;

PAR M. J. BERTRAND.

Les équations qu'il faut intégrer pour déterminer les lois du mouvement de la chaleur dans un corps de forme quelconque contiennent quatre variables indépendantes, le temps et les trois coordonnées qui déterminent la position d'un point. Lorsque l'on connaît a priori les surfaces isothermes, ces trois coordonnées peuvent être remplacées par un seul paramètre, ce qui simplifie notablement le problème.

Les deux seules questions relatives au mouvement de la chaleur dans lesquelles on ait fait usage de ce moyen de simplification sont celles de la propagation de la chaleur dans une sphère ou dans un cylindre à base circulaire, lorsque les températures initiales ne dépendent que de la distance au centre ou à l'axe. M. Lamé a traité aussi, par cette méthode, une question importante relative aux températures permanentes, et il a fait voir, en général, que la connaissance des surfaces isothermes permet d'exprimer sous forme d'intégrale définie la température de chaque point.

Dans ce Mémoire, j'ai résolu les deux questions suivantes :

1°. Dans quels cas est-il possible de ramener l'équation du mouvement de la chaleur à ne contenir que deux variables indépendantes, le temps et un seul paramètre relatif à la position du point considéré, ou, ce qui revient au même, quels sont tous les systèmes de surfaces qui jouissent de la propriété de rester isothermes pendant toute la durée du refroidissement d'un corps, pourvu qu'elles le soient au commencement?

2°. Dans quels cas est-il possible de ramener l'équation du mouvement de la chaleur à ne contenir que trois variables indépendantes, le temps et deux paramètres relatifs à la position du point considéré, ou, ce qui revient au même, quels sont tous les systèmes de lignes qui jouissent de la propriété de rester isothermes pendant toute la durée du refroidissement d'un corps, pourvu qu'elles le soient au commencement?

Je prouve que la première condition ne peut être remplie que si les surfaces isothermes sont des sphères ou des cylindres; la seconde exige que les lignes isothermes soient des cercles ou des hélices.

J'ai traité aussi le cas où l'on demanderait qu'une même série de surfaces restassent isothermes pendant le refroidissement d'un corps, pour un état initial convenablement choisi. Je prouve qu'une infinité de systèmes différents satisfont à cette condition, et qu'ils présentent tous ce caractère particulier que, pendant la durée du refroidissement, les températures de deux points quelconques conservent un rapport constant. La sphère et le cylindre font seuls exception à ce dernier théorème.

I.

1. L'équation qui exprime le mouvement de la chaleur est, en prenant pour unité le coefficient que Fourier désigne par K,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}. \tag{1}$$

Cherchons d'abord la condition pour qu'on puisse substituer aux trois coordonnées x, y, z un seul paramètre λ. Supposons, pour cela,

que v soit fonction seulement de t et de λ; on aura

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dx}, \quad \frac{dv}{dy} = \frac{dv}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dy}, \quad \frac{dv}{dz} = \frac{dv}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dz}.$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2v}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \frac{dv}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{dx^2}, \quad \frac{d^2v}{dy^2} = \frac{d^2v}{d\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \frac{dv}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{dy^2},$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{d^2v}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 + \frac{dv}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{dz^2}.$$

ce qui met l'équation (1) sous la forme

$$(2) \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{d\lambda^2}\left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right] + \frac{dv}{d\lambda}\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right).$$

Pour que x, y, z disparaissent de cette équation, il faut que l'on ait

$$(3) \qquad \frac{d^2\lambda}{dx} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2} = F(\lambda),$$

$$(4) \qquad \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 = F_1(\lambda),$$

F et F_1 étant des fonctions quelconques.

2. L'équation (4) a une signification géométrique très-simple. Elle exprime que deux surfaces infiniment voisines, correspondant à des valeurs infiniment peu différentes de λ, sont partout également distantes. On sait, en effet, que si $\lambda = \varphi(x, y, z)$ représente une série de surfaces, la distance de celles qui correspondent aux paramètres λ et $\lambda + d\lambda$ est exprimée, en chaque point, par la formule

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}}.$$

Si donc l'équation (4) est satisfaite, cette distance sera constante pour tous les points d'une même surface [*]. Il résulte de cette remarque.

---

[*] Si l'on contestait la rigueur de ce raisonnement, on pourrait lui substituer les considérations suivantes :

L'équation

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 = F_1(\lambda)$$

que les surfaces qui répondent aux mêmes valeurs de λ sont *parallèles*, c'est-à-dire qu'on pourrait obtenir l'une quelconque d'entre elles en portant sur les normales de l'une d'elles des longueurs constantes. On sait que de pareilles surfaces ont les mêmes normales, et que les rayons de courbure aux points correspondants ont une différence égale à la distance de ces points.

3. En divisant membre à membre les équations (3) et (4), on trouve

$$\frac{\dfrac{d^2\lambda}{dx^2}+\dfrac{d^2\lambda}{dy^2}+\dfrac{d^2\lambda}{dz^2}}{\left(\dfrac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{d\lambda}{dz}\right)^2}=\frac{F(\lambda)}{F_1(\lambda)}.$$

Cette équation exprime, ce qui, du reste, est évident à priori, que les surfaces considérées doivent être aussi isothermes dans le sens que M. Lamé attache à cette dénomination, c'est-à-dire qu'elles doivent être isothermes dans un corps en équilibre de température; ces surfaces doivent donc satisfaire à la condition que j'ai donnée dans mon Mémoire sur les surfaces isothermes orthogonales, et qui consiste en

---

peut être remplacée par

$$(a)\qquad \left(\frac{d\lambda_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda_1}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda_1}{dz}\right)^2=1,$$

en posant $\lambda=\varpi(\lambda_1)$ et $[\varpi'(\lambda_1)]^2=F_1[\varpi(\lambda_1)]$.

Pour intégrer l'équation (a), occupons-nous d'abord de

$$\left(\frac{d\lambda_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda_1}{dy}\right)^2=1.$$

Cette équation, considérée comme ayant lieu entre les coordonnées x, y, λ_1 d'un point, représente une surface développable dont la normale fait en chaque point, avec l'axe des λ_1, un angle dont le cosinus est $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Cette surface a évidemment pour arête de rebroussement une hélice tracée sur un cylindre de base quelconque et dont chaque élément fait avec le plan de la base un angle ayant pour tangente $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Or les sections d'une pareille surface par des plans perpendiculaires aux arêtes du cylindre (sections qui ont pour équation $\lambda_1=$ constante) sont, comme on sait, les développantes de la section droite du cylindre, par conséquent des courbes parallèles entre elles, et l'on voit sans peine

ce que, si l'on désigne par s la longueur comptée à partir d'une surface fixe sur une ligne coupant toutes les surfaces à angle droit, et par R, r les rayons de courbure principaux de l'une des surfaces à l'extrémité de la ligne s, l'expression

$$\frac{\frac{d^2 s}{d\lambda^2}}{\frac{ds}{d\lambda}} - \frac{ds}{d\lambda}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)$$

doit être fonction du seul paramètre λ.

Dans le cas actuel, la ligne s est droite et sa longueur ne dépend évidemment que de λ; il en sera donc de même de $\frac{ds}{d\lambda}$ et $\frac{d^2 s}{d\lambda^2}$. On conclut de là que $\frac{1}{R} + \frac{1}{r}$ ne doit dépendre aussi que de λ, c'est-à-dire que cette somme doit être constante sur une même surface isotherme.

Si nous désignons par R_1, r_1, R_2, r_2 les rayons de courbure princi-

---

que les deux sections $\lambda = \alpha$, $\lambda_1 = \beta$ sont des courbes parallèles dont la distance est égale à $(\alpha - \beta)$.

Si nous reprenons maintenant l'équation

$$(a) \qquad \left(\frac{d\lambda_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda_1}{dz}\right)^2 = 1,$$

je dis que les deux surfaces qui ont pour équations $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_1 = \beta$ sont parallèles. Si, en effet, nous posons $\frac{d\lambda_1}{dz} = 0$ dans chacune de ces surfaces, nous aurons

$$\left(\frac{d\lambda_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda_1}{dy}\right) = 1,$$

et $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_1 = \beta$ représenteront, d'après ce qui précède, deux courbes parallèles situées sur le plan des xy dont la distance sera $(\alpha - \beta)$: ce qui prouve que les cylindres circonscrits aux deux surfaces parallèlement à l'axe des z sont parallèles et situés à la distance $(\alpha - \beta)$. Mais le premier membre de (a) ne change pas quand on change de coordonnées, pourvu que les axes restent rectangulaires: deux cylindres circonscrits parallèlement à une droite quelconque seront donc parallèles et situés à une distance constante $(\alpha - \beta)$. Si donc l'on considère la première surface comme l'enveloppe d'un cylindre, l'autre sera l'enveloppe d'un cylindre parallèle situé à cette distance fixe du premier, et coïncidera, par conséquent, avec une surface parallèle à la première située à la distance $(\alpha - \beta)$.

paux en deux points déterminés d'une même surface, les rayons relatifs aux points correspondants de la surface parallèle située à la distance s seront $R_1 + s$, $r_1 + s$, $R_2 + s$, $r_2 + s$, et l'on devra par conséquent avoir, quel que soit s,

$$\frac{1}{R_1 + s} + \frac{1}{r_1 + s} = \frac{1}{R_2 + s} + \frac{1}{r_2 + s}.$$

Chassant les dénominateurs de cette équation, il vient

$$s^2 (R_2 + r_2 - R_1 - r_1) + R_2 r_2 (R_1 + r_1) - R_1 r_1 (R_2 + r_2) = 0;$$

et, comme s désigne une quantité arbitraire, on en conclut

$$R_1 + r_1 = R_2 + r_2, \quad R_1 r_1 (R_2 + r_2) = (R_1 + r_1) R_2 r_2,$$

d'où l'on déduit évidemment

$$R_1 = R_2, \quad r_1 = r_2.$$

Les deux rayons de courbure sont donc constants en tous les points d'une même surface isotherme, et cette surface est, par suite, une sphère ou un cylindre droit à base circulaire. Les surfaces parallèles sont des sphères concentriques ou des cylindres de même axe.

II.

4. Supposons maintenant que l'on ne demande plus que les coordonnées x, y, z disparaissent d'elles-mêmes de l'équation (2), mais seulement qu'elles puissent disparaître pour un certain état initial.

Posons

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2} = \varphi(x, y, z),$$

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 = \varphi_1(x, y, z);$$

l'équation (2) du paragraphe précédent deviendra

$$(a) \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi(x, y, z)\frac{dv}{d\lambda} + \varphi_1(x, y, z)\frac{d^2v}{d\lambda^2}.$$

En appliquant cette équation à un second point d'une même surface

isotherme dont nous désignerons les coordonnées par x', y', z'. elle devra fournir la même valeur de $\frac{dv}{dt}$: on aura donc

$$\frac{dv}{d\lambda}[\varphi(x, y, z) - \varphi(x', y', z')] + \frac{d^2v}{d\lambda^2}[\varphi_1(x, y, z) - \varphi_1(x', y', z')] = 0.$$

d'où

$$(b) \qquad -\frac{\frac{d^2v}{d\lambda^2}}{\frac{dv}{d\lambda}} = \frac{\varphi(x, y, z) - \varphi(x', y', z')}{\varphi_1(x, y, z) - \varphi_1(x', y', z')}.$$

Le second membre de cette équation étant indépendant de t, le premier doit l'être aussi, et ne peut alors dépendre que de λ; on aura donc

$$(c) \qquad \frac{\frac{d^2v}{d\lambda^2}}{\frac{dv}{d\lambda}} = F(\lambda).$$

d'où l'on conclut sans peine que v est de la forme

$$(d) \qquad v = F_1(\lambda)\psi(t) + \psi_1(t),$$

F_1 étant une fonction qui dépend de F, et ψ et ψ_1 deux fonctions inconnues de la seule variable t. Remarquons, avant d'aller plus loin, que si $\varphi(x, y, z)$ dépendait du seul paramètre λ, ce qui serait le cas traité dans le paragraphe précédent, le second membre de l'équation (b) se présenterait sous la forme $\frac{0}{0}$, et nos conclusions ne seraient plus applicables.

On peut évidemment substituer au paramètre λ une fonction quelconque de la forme $F_1(\lambda)$; posons donc

$$F_1(\lambda) = \lambda_1,$$

la valeur obtenue pour v deviendra

$$(e) \qquad v = \lambda_1\psi(t) + \psi_1(t).$$

En substituant cette valeur dans l'équation (a), on trouve

$$(f)\qquad \frac{d\psi_1}{dt} + \lambda_1 \frac{d\psi}{dt} = \psi(t)\left(\frac{d^2\lambda_1}{dx^2} + \frac{d^2\lambda_1}{dy^2} + \frac{d^2\lambda_1}{dz^2}\right).$$

Cette équation prouve que $\frac{d^2\lambda_1}{dx^2} + \frac{d^2\lambda_1}{dy^2} + \frac{d^2\lambda_1}{dz^2}$ est une fonction de λ_1 et de t, et comme cette somme est évidemment indépendante de t, elle ne dépend que de λ_1. Posons donc

$$\frac{d^2\lambda_1}{dx^2} + \frac{d^2\lambda_1}{dy^2} + \frac{d^2\lambda_1}{dz^2} = \varpi(\lambda_1);$$

l'équation (f) deviendra

$$\frac{d\psi_1}{dt} + \lambda_1 \frac{d\psi}{dt} = \varpi(\lambda_1)\,\psi(t).$$

En considérant, dans cette équation, $\psi(t)$ comme une fonction inconnue, on en tire

$$\psi(t) = e^{\frac{\varpi(\lambda_1)}{\lambda_1}t}\left[C - \frac{1}{\lambda_1}\int_0^t e^{-\frac{\varpi(\lambda_1)}{\lambda_1}t}\frac{d\psi_1}{dt}\,dt\right].$$

Posons

$$e^{\frac{\varpi(\lambda_1)}{\lambda_1}} = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda_1} = \varphi(\alpha);$$

il viendra

$$\psi(t) = \alpha^t . C - \alpha^t \varphi(\alpha)\int^t \alpha^{-t}\frac{d\psi_1}{dt}\,dt.$$

ou

$$\frac{\psi(t).\alpha^{-t} - C}{\varphi(\alpha)} = -\int_0^t \alpha^{-t}\frac{d\psi_1}{dt}\,dt.$$

Différentiant les deux membres par rapport à t,

$$\frac{\frac{d\psi(t)}{dt}\alpha^{-t} - \alpha^{-t}\log\alpha\,\psi(t)}{\varphi(\alpha)} = \alpha^{-t}\frac{d\psi_1}{dt},$$

ou, en supprimant α^{-t}, et chassant le dénominateur,

$$\frac{d\psi(t)}{dt} - \log\alpha\,\psi(t) = \frac{d\psi_1}{dt}\cdot\varphi(\alpha).$$

Prenant les logarithmes des deux membres, puis la dérivée par rapport à t.

$$\frac{\frac{d^2\psi}{dt^2} - \log\lambda\frac{d\psi}{dt}}{\frac{d\psi}{dt} - \log\lambda\,\psi(t)} = \frac{\frac{d^2\psi_1}{dt^2}}{\frac{d\psi_1}{dt}}.$$

Or le premier membre ne peut être indépendant de λ que si

$$\frac{\frac{d^2\psi}{dt^2}}{\frac{d\psi}{dt}} = \frac{\frac{d\psi}{dt}}{\psi},$$

c'est-à-dire

$$\psi(t) = Ae^{mt},$$

m désignant une constante arbitraire. On déduit de là

$$\frac{\frac{d^2\psi_1}{dt^2}}{\frac{d\psi_1}{dt}} = m,$$

donc

$$\psi_1(t) = Be^{mt} + C;$$

et, par suite, l'expression

$$v = \lambda_1\psi(t) + \psi_1(t)$$

devient

$$v = e^{mt}(A\lambda_1 + B) + C.$$

ou, en posant $A\lambda_1 + B = \lambda_2$,

$$v = e^{mt}\lambda_2 + C.$$

La constante C peut évidemment être supprimée, car cela revient à changer le zéro de l'échelle thermométrique, et la valeur de v devient enfin

$$(k) \qquad v = e^{mt}\lambda_2.$$

On vérifie que cette valeur satisfait effectivement à l'équation de la

propagation de la chaleur, pourvu que l'on ait

$$m\lambda_2 = \frac{d^2\lambda_2}{dx^2} + \frac{d^2\lambda^2}{dy^2} + \frac{d^2\lambda_2}{dz^2}.$$

Lorsque cette condition sera remplie, et elle peut l'être évidemment d'une infinité de manières, la formule (k) montre que, si les températures initiales sont représentées par la formule $v = \lambda_2$, *tous les points du corps éprouveront, pendant la durée du refroidissement, des variations de températures telles que le rapport des températures de deux points quelconques sera indépendant du temps.*

III.

5. Cherchons maintenant dans quels cas un changement de coordonnées peut réduire à trois le nombre des variables indépendantes qui entrent dans l'équation. Nommons α et β les deux paramètres qui pourront ainsi être substitués à x, y, z. En supposant que la température des points du corps ne dépende que de t, α et β, on aura

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{dv}{d\beta}\frac{d\beta}{dx},$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2v}{d\alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \frac{d^2v}{d\beta^2}\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 + 2\frac{d^2v}{d\alpha d\beta}\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx} + \frac{dv}{d\alpha}\frac{d^2\alpha}{dx^2} + \frac{dv}{d\beta}\frac{d^2\beta}{dx^2},$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{dv}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy} + \frac{dv}{d\beta}\frac{d\beta}{dy},$$

$$\frac{d^2v}{dy^2} = \frac{d^2v}{d\alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \frac{d^2v}{d\beta^2}\left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2 + 2\frac{d^2v}{d\alpha d\beta}\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dy} + \frac{dv}{d\alpha}\frac{d^2\alpha}{dy^2} + \frac{dv}{d\beta}\frac{d^2\beta}{dy^2}.$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dv}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dz} + \frac{dv}{d\beta}\frac{d\beta}{dz},$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{d^2v}{d\alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2 + \frac{d^2v}{d\beta^2}\left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2 + 2\frac{d^2v}{d\alpha d\beta}\frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dz} + \frac{dv}{d\alpha}\frac{d^2\alpha}{dz^2} + \frac{dv}{d\beta}\frac{d^2\beta}{dz^2}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation du mouvement de la chaleur, elle devient

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} = {} & \frac{d^2v}{d\alpha^2}\left[\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2\right] + \frac{d^2v}{d\beta^2}\left[\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2\right] \\ & + 2\frac{d^2v}{d\alpha d\beta}\left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx} + \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dy} + \frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dz}\right) \\ & + \frac{dv}{d\alpha}\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2} + \frac{d^2\alpha}{dy^2} + \frac{d^2\alpha}{dz^2}\right) + \frac{dv}{d\beta}\left(\frac{d^2\beta}{dx^2} + \frac{d^2\beta}{dy^2} + \frac{d^2\beta}{dz^2}\right).\end{aligned}$$

Pour que x, y, z disparaissent de cette équation, il faut que

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2=f_1(\alpha,\beta),\\ &\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2=f_2(\alpha,\beta),\\ &\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dz}=f_3(\alpha,\beta),\\ &\frac{d^2\alpha}{dx^2}+\frac{d^2\alpha}{dy^2}+\frac{d^2\alpha}{dz^2}=f_4(\alpha,\beta),\\ &\frac{d^2\beta}{dx^2}+\frac{d^2\beta}{dy^2}+\frac{d^2\beta}{dz^2}=f_5(\alpha,\beta), \end{aligned}\right.$$

f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 pouvant être des fonctions quelconques de α et β.

6. Avant de chercher la forme générale des fonctions α et β qui peuvent satisfaire aux cinq équations précédentes, remarquons qu'en nommant α_1 et β_1 deux solutions quelconques, on aura une solution plus générale en posant

$$\alpha=\varphi(\alpha_1,\beta_1),\quad \beta=\varphi_1(\alpha_1,\beta_1),$$

quelles que soient les fonctions φ et φ_1. En substituant, en effet, ces valeurs dans les cinq équations (α), on vérifiera sans peine qu'elles seront satisfaites si α_1 et β_1 en forment une solution; les propriétés exprimées par les équations (α) appartiennent, par conséquent, à deux systèmes quelconques de surfaces se coupant suivant les lignes isothermes que nous voulons étudier.

Cela posé, les trois premières des équations (α) expriment que deux surfaces quelconques représentées par

$$\alpha=\text{constante},\quad \beta=\text{constante},$$

se coupent suivant une courbe le long de laquelle elles forment le même angle, et que, de plus, pour tous les points de cette courbe, la distance de deux surfaces infiniment voisines appartenant au même système est constante. D'après ce qui vient d'être dit, les surfaces qui ont pour équations

$$\alpha=\text{constante},\quad \beta=\text{constante},$$

ne sont pas assujetties à d'autre condition que celle d'être le lieu d'un nombre infini de courbes qui, pendant le refroidissement, restent constamment isothermes. On pourra donc, après avoir choisi arbitrairement une première surface, faire en sorte que, pour un point donné de chacune des lignes isothermes qui la composent, la distance à la surface infiniment voisine du même système ait une valeur infiniment petite donnée. En vertu des conditions précédentes, ces deux surfaces auront alors partout la même distance et seront parallèles. On pourra, de même, choisir une troisième surface parallèle à la seconde, qui, comme elle, sera le lieu d'une infinité de lignes isothermes, puis une quatrième parallèle à cette troisième, etc.; en sorte que, après avoir choisi arbitrairement une première surface, on pourra toujours faire en sorte que les autres surfaces du même système lui soient parallèles. Le premier système de surfaces étant choisi de cette manière, nous déterminerons le second comme il suit : Après avoir pris une ligne isotherme quelconque sur une surface du premier système, nous élèverons en un de ses points une normale à cette surface, jusqu'à la rencontre de la surface infiniment voisine. La courbe isotherme appartenant à la surface infiniment voisine et passant par l'extrémité de cette normale sera une seconde génératrice de la surface que nous formons; un point quelconque de cette nouvelle génératrice en fournira, de même, une troisième, puis une quatrième, et ainsi de suite. Or, d'après la manière dont nous obtenons ces diverses génératrices, nous sommes assurés qu'en un point de chacune d'elles, et, par conséquent, tout le long de la courbe d'intersection, la surface qui les contient coupe à angle droit la surface correspondante du premier système, et comme celles-ci sont des surfaces parallèles, les autres sont nécessairement des surfaces réglées. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Les lignes isothermes que nous considérons doivent toujours être situées sur une série de surfaces parallèles à l'une quelconque de celles qui sont le lieu d'un nombre infini de ces lignes. Elles sont aussi situées sur une série de surfaces réglées coupant les premières à angle droit.

7. Considérons l'un des systèmes de surfaces parallèles sur lesquels

les lignes isothermes sont situées, et sur l'une de ces surfaces, en deux points d'une même ligne isotherme, deux éléments superficiels ayant la même surface $d\omega$. Par les différents points du contour de ces deux éléments, concevons les normales à la surface qui les contient, et prolongeons-les jusqu'à la surface infiniment voisine. Nous formerons ainsi deux petits volumes équivalents comme ayant même base et même hauteur, et pour que, au bout d'un temps infiniment petit, ces deux volumes aient conservé la même température (ce qui doit être, puisqu'ils sont sur une même ligne isotherme), il faut qu'ils aient gagné la même quantité de chaleur. Ceci devant avoir lieu dans toute hypothèse de distribution calorifique dans laquelle la température d'un point ne dépend que de deux paramètres qui définissent une courbe isotherme, on peut supposer que les surfaces isothermes soient précisément, au moment considéré, les surfaces parallèles que nous avons choisies. Dans cette hypothèse, les seuls flux de chaleur qui puissent modifier la température de nos petits volumes sont normaux à ces surfaces isothermes; mais, ces surfaces étant parallèles, les flux rapportés à la même superficie sont égaux en deux points de la même surface. Il entrera donc la même quantité de chaleur par les bases inférieures que nous avons supposées équivalentes, et il faudra, par suite, qu'il en sorte la même quantité par les bases supérieures, ce qui exige que ces bases soient aussi équivalentes. Mais en désignant par ε la distance infiniment petite des deux surfaces, et par R, r, R′, r' les rayons de courbure de la première aux points considérés, ces deux bases sont égales à

$$d\omega\left[1+\varepsilon\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)\right],$$

$$d\omega\left[1+\varepsilon\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{r'}\right)\right].$$

Pour qu'elles soient équivalentes, on doit donc avoir

$$(\beta)\qquad \frac{1}{R}+\frac{1}{r}=\frac{1}{R'}+\frac{1}{r'}.$$

Cette formule s'appliquant à deux points quelconques de l'une des surfaces, situés sur une même ligne isotherme, sera encore vraie pour

deux points correspondants aux premiers, pris sur une surface parallèle située à la distance s; on aura donc

$$(7)\qquad \frac{1}{R+s}+\frac{1}{r+s}=\frac{1}{R'+s}+\frac{1}{r'+s},$$

car, aux points correspondants de deux surfaces parallèles, les rayons de courbure diffèrent d'une quantité égale à la distance des deux surfaces. L'équation (7) devant avoir lieu quel que soit s, on en déduit facilement

$$R=R',\qquad r=r'.$$

et, par conséquent, on peut énoncer le théorème suivant :

Sur l'une quelconque des surfaces parallèles considérées, les deux rayons de courbure restent constants le long d'une même ligne isotherme.

Remarquons que l'une des surfaces parallèles considérées est une surface quelconque ayant pour génératrices les lignes isothermes dont nous cherchons la nature; nous pouvons donc supposer que ce soit l'une des surfaces réglées sur lesquelles nous avons vu que ces lignes étaient situées. Mais sur ces surfaces, les lignes isothermes sont fournies par leurs intersections, avec d'autres surfaces auxquelles leurs génératrices sont normales; elles sont, par conséquent, les trajectoires orthogonales de ces génératrices. Il résulte de là que :

Les lignes isothermes permanentes sont les trajectoires orthogonales des génératrices d'une série de surfaces réglées, telles que, sur chaque surface, le long d'une même trajectoire orthogonale, les deux rayons de courbure soient constants.

8. Pour déduire de cette dernière proposition la nature de ces surfaces réglées, nous ferons usage d'un théorème démontré par M. O. Bonnet, dans son Mémoire sur la théorie générale des surfaces. Ce théorème consiste en ce que, sur une surface gauche quelconque, l'inverse du produit des rayons de courbure en un point de l'une des génératrices peut s'exprimer par la formule suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{RR}}=\frac{\sqrt{R'R'}}{n\pm R'R'},$$

ou R_1, R'_1 désignent les deux rayons de courbure de la surface au point où la génératrice rencontre *la ligne de striction*, et n la longueur de la génératrice comprise entre ce point et celui que l'on considère.

D'après cette formule, le théorème énoncé à la fin du paragraphe précédent peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{\sqrt{R_1 R'_1}}{n^2 + R_1 R'_1} = \frac{\sqrt{R_2 R'_2}}{n'^2 + R_2 R'_2},$$

R_1, R'_1, R_2, R'_2 étant les rayons de courbure de la surface en deux points de la ligne de striction, et n, n' les portions de génératrice comprise entre ces points et l'une quelconque de leurs trajectoires orthogonales. En considérant sur une seconde trajectoire orthogonale deux points appartenant aux mêmes génératrices, n et n' augmenteront évidemment d'une même quantité α; on aura donc, quelque soit α,

$$\frac{\sqrt{R_1 R'_1}}{(n+\alpha)^2 + R_1 R'_1} = \frac{\sqrt{R_2 R'_2}}{(n'+\alpha)^2 + R_2 R'_2}.$$

Chassant les dénominateurs et égalant les coefficients des mêmes puissances de α, on trouve

$$n = n',$$
$$R_1 R'_1 = R_2 R'_2.$$

Il résulte de la première de ces deux équations que la ligne de striction coupe à angle droit les génératrices de la surface, car on peut l'obtenir en portant une longueur constante sur chaque génératrice à partir d'une même trajectoire orthogonale. Les deux rayons de courbure de la surface auront donc la même valeur tout le long de la ligne de striction, et nous sommes conduits à nous proposer la question suivante :

Quelles sont les surfaces gauches dont la ligne de striction coupe à angle droit les génératrices, et qui, de plus, a ses deux rayons de courbure constants pour tous les points de cette ligne?

9. Pour que la ligne de striction d'une surface gauche coupe à

angle droit les génératrices, il faut qu'en chaque point son plan osculateur soit normal à la surface, car les éléments de cette ligne sont, dans ce cas, les plus courtes distances entre deux génératrices consécutives, et deux éléments consécutifs sont alors perpendiculaires à une même génératrice. Le rayon de courbure de la ligne de striction sera donc égal, en chaque point, à celui d'une section faite dans la surface par un plan perpendiculaire à la génératrice, et, par conséquent, il sera constant, puisque la courbure de cette section est évidemment égale à la somme des courbures principales de la surface. La seconde courbure de la ligne de striction sera aussi constante; on sait que l'on entend par seconde courbure le rapport d'un arc infiniment petit à l'angle des plans osculateurs qui répondent à ses extrémités. Or l'angle de ces plans osculateurs est le même que celui de deux génératrices consécutives de la surface gauche, lequel est égal, comme on le reconnaît aisément, à l'inclinaison de l'une d'elles sur le plan qui passe par l'autre et par le point où la première rencontre la ligne de striction. Mais en faisant tourner de 90 degrés autour de la tangente à la ligne de striction le système composé de ce plan et de cette génératrice, le plan devient normal à la surface et la génératrice coïncide avec la normale en un point infiniment voisin. Si donc on appelle α l'angle formé par la ligne de striction avec l'une des lignes de courbure, et R, r les rayons de courbure de la surface au point considéré, en vertu d'un théorème démontré dans mon Mémoire sur la théorie des surfaces, l'angle $d\theta$ que nous voulons évaluer sera donné par la formule

$$d\theta = ds \sin 2\alpha \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right).$$

Or, par hypothèse, R et r sont constants; α l'est aussi, puisque l'indicatrice est toujours semblable à elle-même, et que la ligne de striction est dirigée suivant une perpendiculaire à son asymptote. Le rapport $\frac{d\theta}{ds}$ est donc constant, et, par conséquent, les deux courbures de la ligne de striction sont les mêmes en tous ces points. Cette ligne est donc une hélice, et nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Toutes les lignes isothermes permanentes sont situées sur une série

de surfaces gauches ayant des hélices pour lignes de striction, et elles sont, sur chacune de ces surfaces, les trajectoires orthogonales des génératrices.

10. En étudiant la surface gauche qui a une hélice pour ligne de striction, c'est-à-dire le lieu des perpendiculaires menées par les différents points d'une hélice à ses plans osculateurs, on reconnaît que les courbes qui coupent à angle droit les génératrices de cette surface sont des hélices de même pas que la ligne de striction et tracées sur des cylindres de même axe. Cette première surface étant connue ainsi que les lignes isothermes dont elle est le lieu, nous avons vu que les autres lignes isothermes seront les lignes qui correspondront aux premières sur une série de surfaces parallèles à la surface trouvée; on voit sans peine que de pareilles lignes sont toutes des hélices de même pas que les premières et tracées sur des cylindres de même axe. Un pareil système d'hélices peut évidemment être considéré comme résultant de l'intersection de ces cylindres par une série d'héliçoïdes à plan directeur; leurs équations peuvent donc se mettre sous la forme

$$x^2 + y^2 = \alpha,$$

$$z - \text{arc tang}\,\frac{y}{x} = \beta.$$

On vérifie que ces valeurs de α et β satisfont, en effet, aux cinq équations du § IV : on en tire

$$\frac{d\alpha}{dx} = 2x, \qquad \frac{d\alpha}{dy} = 2y, \qquad \frac{d\alpha}{dz} = 0,$$

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} = 2, \qquad \frac{d^2\alpha}{dy^2} = 2, \qquad \frac{d^2\alpha}{dz^2} = 0,$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{d\beta}{dy} = -\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{d\beta}{dz} = 1,$$

$$\frac{d^2\beta}{dx^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{d^2\beta}{dy^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{d^2\beta}{dz^2} = 0;$$

on a donc

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2 = 4x^2 + 4y^2 = 4\alpha,$$

$$\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2 = \frac{1}{x^2+y^2} + 1 = \frac{1}{\alpha} + 1,$$

$$\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx} + \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dy} + \frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dz} = 0,$$

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} + \frac{d^2\alpha}{dy^2} + \frac{d^2\alpha}{dz^2} = 4,$$

$$\frac{d^2\beta}{dx^2} + \frac{d^2\beta}{dy^2} + \frac{d^2\beta}{dz^2} = 0.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation de la propagation de la chaleur, elle devient

$$\frac{dv}{dt} = 4\frac{d^2v}{d\alpha^2} + \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)\frac{d^2v}{d\beta^2} + 4\frac{dv}{d\alpha}.$$

11. Dans la démonstration précédente, nous avons admis que les surfaces réglées sur lesquelles se trouvent les lignes isothermes étaient des surfaces gauches. Il faut encore chercher si aucune surface développable ne remplit les conditions qui leur sont imposées. Or, sur une surface développable, le rayon de courbure, aux différents points d'une même génératrice, varie proportionnellement à la distance du point considéré à l'arête de rebroussement. Si donc on nomme n et n' les distances comptées sur deux génératrices entre l'arête de rebroussement et une même trajectoire orthogonale des génératrices, et C et C′ deux quantités constantes pour tous les points de ces génératrices, on devra avoir

$$n\mathrm{C} = n'\mathrm{C}'.$$

Mais si l'on considère une seconde trajectoire orthogonale des génératrices située à une distance α de la première, il faudra changer n et n' en $n + \alpha$ et $n' + \alpha$; on aura donc, quel que soit α,

$$(n + \alpha)\,\mathrm{C} = (n' + \alpha)\,\mathrm{C}'.$$

d'où l'on tire

$$C = C', \quad n = n'.$$

La surface est donc telle que les trajectoires orthogonales des génératrices les coupent toutes à une même distance de l'arête de rebroussement. Si, par conséquent, on la développe sur un plan, l'arête de rebroussement se développera suivant une courbe telle, que les trajectoires orthogonales de ses tangentes les coupent toutes à une même distance du point de contact, ce qui exige que ces trajectoires aient un rayon de courbure constant et soient, par conséquent, des cercles; l'arête de rebroussement est alors un point, et la surface développable est un cône. La courbure de ce cône devant être constante sur une même trajectoire orthogonale aux génératrices, c'est-à-dire sur une même ligne de courbure, nous sommes conduits à nous proposer la question suivante :

Quels sont les cônes dont la courbure est constante le long d'une même ligne de courbure?

12. Si, par les différents points d'une même ligne de courbure, on mène des normales à une surface et que sur chaque normale on porte une longueur égale au rayon de courbure correspondant, le lieu des points ainsi obtenus est une courbe à laquelle toutes ces normales sont tangentes. Dans le cas actuel, tous les rayons de courbure étant égaux entre eux, cette courbe devra se trouver sur une surface parallèle au cône considéré, et, par conséquent, couper à angle droit toutes les normales. Il faut, par conséquent, qu'elle soit à la fois tangente et normale aux mêmes lignes, c'est-à-dire qu'elle se réduise à un point. La ligne de courbure du cône est située sur une sphère ayant ce point pour centre, et à laquelle le cône est évidemment circonscrit. C'est donc un cône droit à base circulaire.

13. On conclut de ce qui précède que les lignes isothermes situées sur ce cône sont, dans ce cas, des cercles dont les plans sont parallèles et les centres situés sur une même droite perpendiculaire à ces plans. Les surfaces parallèles au cône sont d'autres cônes de révolution autour du même axe, et les lignes correspondant aux cercles du premier

sont d'autres cercles ayant leurs centres sur le même axe. Une seconde solution de la question que nous nous étions proposée est donc fournie par une série de cercles ayant tous leurs plans parallèles et le centre sur un même axe perpendiculaire à ces plans; les équations de pareils cercles sont

$$z = \alpha,$$
$$x^2 + y^2 = \beta.$$

En substituant ces valeurs de α et β dans l'équation de la propagation de la chaleur, elle devient

$$\frac{dv}{dt} = 4\beta\frac{d^2v}{d\beta^2} + 4\frac{dv}{d\beta} + \frac{d^2v}{dz^2}.$$

Nous avons donc trouvé les deux seuls cas dans lesquels un changement de coordonnées peut diminuer le nombre des variables indépendantes dans les questions relatives au mouvement de la chaleur.

SUR

UNE QUESTION RELATIVE A LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. HERMITE.

Soient $n+1$ nombres entiers

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\ldots,\quad \varkappa,\quad \lambda,$$

dont le plus grand commun diviseur est l'unité; on propose de trouver tous les systèmes de $n(n+1)$ autres nombres, savoir :

$$\begin{array}{llll}
\alpha', & \alpha'',\ldots, & \alpha^{(n)}, \\
\beta', & \beta'',\ldots, & \beta^{(n)}, \\
\gamma', & \gamma'',\ldots, & \gamma^{(n)}, \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\varkappa', & \varkappa'',\ldots, & \varkappa^{(n)}, \\
\lambda', & \lambda'',\ldots, & \lambda^{(n)},
\end{array}$$

qui rendent le déterminant

$$\begin{array}{lllll}
\alpha, & \alpha',\ldots, & \alpha^{(i)},\ldots, & \alpha^{(n)}, \\
\beta, & \beta',\ldots, & \beta^{(i)},\ldots, & \beta^{(n)}, \\
\gamma, & \gamma',\ldots, & \gamma^{(i)},\ldots, & \gamma^{(n)}, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\varkappa, & \varkappa',\ldots, & \varkappa^{(i)},\ldots, & \varkappa^{(n)}, \\
\lambda, & \lambda',\ldots, & \lambda^{(i)},\ldots, & \lambda^{(n)},
\end{array}$$

égal à plus ou moins un.

Solution. Nommons respectivement

π_1 le plus grand commun diviseur de α et β,

π_2 *idem* π_1 et γ,

π_3 *idem* π_2 et δ

. . . . . .

π_{n-1} *idem* π_{n-2} et $\varkappa$,

π_n *idem* π_{n-1} et λ;

dans l'hypothèse admise, π_n sera l'unité. Prenons ensuite les nombres entiers

$$a,\quad b,\quad c,\quad d,\ldots,\quad h,\quad l,$$
$$c',\quad d',\ldots,\quad h',\quad l'.$$

l'apres les conditions

$$\begin{aligned}
\alpha\beta - b\alpha &= \pi_1,\\
c'\gamma - c\pi_1 &= \pi_2,\\
d'\delta - d\pi_2 &= \pi_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
k'\varkappa - h\pi_{n-2} &= \pi_{n-1},\\
l'\lambda - l\pi_{n-1} &= \pi_n = 1.
\end{aligned}$$

On satisfera à la question proposée par les valeurs suivantes :

$$\alpha_i = am_i + \mathrm{M}_i \frac{\alpha}{\pi_1},$$

$$\beta_i = bm_i + \mathrm{M}_i \frac{\beta}{\pi_1},$$

$$\gamma_i = cn_i + \mathrm{N}_i \frac{\gamma}{\pi_2},$$

$$\delta_i = dp_i + \mathrm{P}_i \frac{\delta}{\pi_3},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\varkappa_i = ks_i + \mathrm{S}_i \frac{\varkappa}{\pi_{n-1}},$$

$$\lambda_i = lt_i + \mathrm{T}_i \frac{\lambda}{\pi_n},$$

les quantités

$$M_i, \quad N_i, \quad P_i, \ldots, \quad S_i, \quad T_i$$

dépendant des nombres entiers

$$m_i, \quad n_i, \quad p_i, \ldots, \quad s_i, \quad t_i$$

par les équations

$$M_i = c' n_i + N_i \frac{\varpi}{\varpi},$$

$$N_i = d' p_i + P_i \frac{\varpi}{\varpi},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_i = l' t_i + T_i \frac{\varpi_n}{\varpi_n},$$

et toutes les solutions possibles s'obtiendront en prenant toutes les valeurs des n^2 quantités

$$m_i, \quad n_i, \quad p_i, \ldots, \quad s_i, \quad t_i,$$

pour lesquelles le déterminant

$$\begin{matrix} m_1, & m_2, \ldots, & m_n, \\ n_1, & n_2, \ldots, & n_n, \\ p_1, & p_2, \ldots, & p_n, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_1, & s_2, \ldots, & s_n, \\ t_1, & t_2, \ldots, & t_n, \end{matrix}$$

égale plus ou moins un.

Ainsi, par exemple, lorsque $n = 2$, s'il s'agit de rendre égal à l'unité le déterminant

$$\begin{Bmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{Bmatrix} = \alpha(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + \beta(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') + \gamma(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'' \ldots$$

on aura

$$\alpha' = am_1 + M_1 \frac{\alpha}{\pi},$$
$$\beta' = bm_1 + M_1 \frac{\beta}{\pi},$$
$$\gamma' = cn_1 + N_1 \gamma,$$

avec

$$M_1 = c' n_1 + N_1 \pi_1,$$

ce qui donne

$$\alpha' = am_1 + \frac{\alpha c'}{\pi_1} n_1 + N_1 \alpha,$$
$$\beta' = bm_1 + \frac{\beta c'}{\pi} n_1 + N_1 \beta,$$
$$\gamma' = cn_1 \qquad\qquad + N_1 \gamma;$$

on trouvera ensuite semblablement

$$\alpha'' = am_2 + \frac{\alpha c'}{\pi_1} n_2 + N_2 \alpha,$$
$$\beta'' = bm_2 + \frac{\beta c'}{\pi} n_2 + N_2 \beta,$$
$$\gamma'' = cn_2 \qquad\qquad + N_2 \gamma,$$

et l'on devra prendre pour m_1, n_1, m_2, n_2 indéfiniment tous les nombres entiers pour lesquels

$$m_1 n_2 - m_2 n_1 = \pm 1.$$

Si $n = 3$, la solution générale de l'équation

$$\begin{Bmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'', & \alpha''' \\ \beta, & \beta', & \beta'', & \beta''' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'', & \gamma''' \\ \delta, & \delta', & \delta'', & \delta''' \end{Bmatrix} = \pm 1$$

sera de même comprise dans les formules

$$\alpha' = am_1 + \frac{\alpha c'}{\pi_1} n_1 + \frac{\alpha d'}{\pi_2} p_1 + P_1 \alpha,$$
$$\beta' = bm_1 + \frac{\beta c'}{\pi} n_1 + \frac{\beta d'}{\pi_2} p_1 + P_1 \beta,$$
$$\gamma' = cn_1 \qquad\qquad - \frac{\gamma d}{\pi_2} p_1 + P_1 \gamma,$$
$$\delta' = dp_1 \qquad\qquad\qquad + P_1 \delta;$$

$$\alpha'' = am_2 + \frac{\alpha c'}{\pi_1} n_2 + \frac{\alpha d'}{\pi_2} p_2 + P_2 \alpha,$$
$$\beta'' = bm_2 + \frac{\beta c'}{\pi_1} n_2 + \frac{\beta d'}{\pi_2} p_2 + P_2 \beta,$$
$$\gamma'' = cn_2 \qquad + \frac{\gamma d'}{\pi_2} p_2 + P_2 \gamma,$$
$$\delta'' = dp_2 \qquad\qquad + P_2 \delta:$$

$$\alpha''' = am_3 + \frac{\alpha c'}{\pi_1} n_3 + \frac{\alpha d'}{\pi_2} p_3 + P_3 \alpha,$$
$$\beta''' = bm_3 + \frac{\beta c'}{\pi_1} n_3 + \frac{\beta d'}{\pi_2} p_3 + P_3 \beta,$$
$$\gamma''' = cn_3 \qquad + \frac{\gamma d'}{\pi_2} p_3 + P_3 \gamma,$$
$$\delta''' = dp_3 \qquad\qquad + P_3 \delta.$$

Voici maintenant l'analyse qui nous a conduit à ces résultats.

Soient, pour abréger, A le déterminant des quantités

$$A \qquad \alpha^i, \quad \beta^i, \quad \gamma^i, \ldots, \quad \lambda^i,$$

B celui du système

$$B \qquad \left| \begin{array}{cccccc} \xi, & \beta, & 0, & 0, \ldots, & 0, \\ \xi', & -\alpha, & \gamma, & 0, \ldots, & 0, \\ \xi'', & 0, & -\beta, & \delta, \ldots, & 0, \\ \xi''', & 0, & 0, & -\gamma, \ldots & 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi^{n-1}, & 0, & 0, & 0, \ldots, & \lambda, \\ \xi^n, & 0, & 0, & 0, \ldots, & -\varkappa. \end{array} \right|$$

dont la loi est facile à saisir, et où les quantités ξ sont définies par les équations

$$\alpha\xi + \beta\xi' + \gamma\xi'' + \ldots + \lambda\xi^n = 1,$$
$$\alpha'\xi + \beta'\xi' + \gamma'\xi'' + \ldots + \lambda'\xi^n = 0,$$
$$\alpha''\xi + \beta''\xi' + \gamma''\xi'' + \ldots + \lambda''\xi^n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha^n\xi + \beta^n\xi' + \gamma^n\xi'' + \ldots + \lambda^n\xi^n = 0.$$

De la composition des systèmes (A) et (B) résultera le nouveau système

$$\begin{array}{lllll}
1, & 0, & 0,\ldots, & 0,\ldots, & 0, \\
0, & \alpha'\beta - \beta'\alpha, & \alpha''\beta - \beta''\alpha,\ldots, & \alpha^{(i)}\beta - \beta^{(i)}\alpha,\ldots, & \alpha^{(n)}\beta - \beta^{(n)}\alpha, \\
0, & \beta'\gamma - \gamma'\beta, & \beta''\gamma - \gamma''\beta,\ldots, & \beta^{(i)}\gamma - \gamma^{(i)}\beta,\ldots, & \beta^{(n)}\gamma - \gamma^{(n)}\beta, \\
0, & \gamma'\delta - \delta'\gamma, & \gamma''\delta - \delta''\gamma,\ldots & \gamma^{(i)}\delta - \delta^{(i)}\gamma,\ldots, & \gamma^{(n)}\delta - \delta^{(n)}\gamma, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0, & \varkappa'\lambda - \lambda'\varkappa, & \varkappa''\lambda - \lambda''\varkappa,\ldots, & \varkappa^{(i)}\lambda - \lambda^{(i)}\varkappa,\ldots, & \varkappa^{(n)}\lambda - \lambda^{(n)}\varkappa.
\end{array}$$

En appelant C son déterminant, ou, ce qui revient au même, celui des n^2 quantités

$$(C) \qquad \alpha^{(i)}\beta - \beta^{(i)}\alpha, \quad \beta^{(i)}\gamma - \gamma^{(i)}\beta,\ldots, \quad \varkappa^{(i)}\lambda - \lambda^{(i)}\varkappa,$$

on aura, par ce théorème connu,

$$C = AB.$$

Or on trouve facilement, au signe près,

$$B = \beta\gamma\delta\ldots\varkappa;$$

donc on peut remplacer la condition proposée, savoir

$$A = \pm 1,$$

par la suivante,

$$C = \pm \beta\gamma\delta\ldots\varkappa,$$

dont nous allons nous occuper.

Exposons d'abord une transformation des termes du système (C); j'observe, à cet effet, que π_i désignant le plus grand commun diviseur de α et β, on aura nécessairement

$$\alpha^{(i)}\beta - \beta^{(i)}\alpha = m_i\pi_i,$$

d'où l'on tire

$$\alpha^{(i)} = am_i + M_i\frac{\alpha}{\pi_i},$$

$$\beta^{(i)} = bm_i + M_i\frac{\beta}{\pi_i},$$

les nombres entiers m_i et M_i restant entièrement arbitraires, et a et b étant déterminés par l'équation

$$a\beta - b\alpha = \pi_1.$$

Au moyen de cette valeur de $\beta^{(i)}$, on trouve

$$\beta^{(i)}\gamma - \gamma^{(i)}\beta = b\gamma m_i + \frac{\beta}{\pi_1}(M_i\gamma - \gamma^{(i)}\pi_1).$$

Or, π_2 désignant le plus grand commun diviseur de π_1 et γ, on aura nécessairement

$$M_i\gamma - \gamma^{(i)}\pi_1 = n_i\pi_2,$$

d'où

$$M_i = c'n_i + N_i\frac{\pi_1}{\pi_2},$$

$$\gamma^{(i)} = cn_i + N_i\frac{\gamma}{\pi_2},$$

les nombres entiers n_i et N_i étant quelconques, c et c' dépendant de l'équation

$$c'\gamma - c\pi_1 = \pi_2.$$

La répétition du même calcul nous conduira de l'expression précédente de $\gamma^{(i)}$ à celle de $\delta^{(i)}$; il vient, en effet,

$$\gamma^{(i)}\delta - \delta^{(i)}\gamma = c\delta n_i + \frac{\gamma}{\pi_2}(N_i\delta - \delta^{(i)}\pi_2),$$

et posant encore

$$N_i\delta - \delta^{(i)}\pi_2 = p_i\pi_3,$$

π_3 étant le plus grand commun diviseur de π_2 et δ, on en conclura

$$N_i = d'p_i + P_i\frac{\pi_2}{\pi_3},$$

$$\delta^{(i)} = dp_i + P_i\frac{\delta}{\pi_3},$$

d et d' étant donnés par l'équation

$$d'\delta - d\pi_2 = \pi_3.$$

La loi que suivent ces opérations est maintenant évidente, et on en

conclura, d'une part,

$$\alpha^{(i)}\beta - \beta^{(i)}\alpha = m_i\pi_1,$$

$$\beta^{(i)}\gamma - \gamma^{(i)}\beta = b\gamma m_i + \frac{\beta\pi_2}{\pi_1}n_i,$$

$$\gamma^{(i)}\delta - \delta^{(i)}\gamma = c\delta n_i + \frac{\gamma\pi_3}{\pi_2}p_i,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varkappa^{(i)}\lambda - \lambda^{(i)}\varkappa = k\lambda s_i + \frac{\varkappa\pi_n}{\pi_{n-1}}t_i,$$

ou il est essentiel d'observer que m_i, n_i,..., s_i, t_i restent jusqu'à présent des entiers entièrement arbitraires.

D'un autre côté, nous obtenons d'ailleurs

$$\alpha^{(i)} = am_i + M_i\frac{\alpha}{\pi_1},$$

$$\beta^{(i)} = bm_i + M_i\frac{\beta}{\pi_1},$$

$$\gamma^{(i)} = cn_i + N_i\frac{\gamma}{\pi_2},$$

$$\delta^{(i)} = dp_i + P_i\frac{\delta}{\pi_3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varkappa^{(i)} = ks_i + S_i\frac{\varkappa}{\pi_{n-1}},$$

$$\lambda^{(i)} = lt_i + T_i\frac{\lambda}{\pi_n},$$

et les entiers M_i, N_i, P_i,... s'expriment de proche en proche, uniquement par m_i, n_i, p_i,... au moyen de ces autres équations

$$M_i = c'n_i + N_i\frac{\pi_1}{\pi_2},$$

$$N_i = d'p_i + P_i\frac{\pi_2}{\pi_3},$$

$$\vdots$$

$$S_i = k't_i + T_i\frac{\pi_{n-1}}{\pi_n},$$

lesquelles ne laissent d'indéterminé que T_i.

Ces résultats obtenus, reportons-nous maintenant au système (C), qui a été transformé dans le suivant, savoir,

$$\begin{array}{llll}
m_1\pi_1, & m_2\pi_1,\ldots, & m_i\pi_1,\ldots, & m_n\pi_1, \\
b\gamma m_1 + \frac{\beta\pi_2}{\pi_1}n_1, & b\gamma m_2 + \frac{\beta\pi_2}{\pi_1}n_2,\ldots, & b\gamma m_i + \frac{\beta\pi_2}{\pi_1}n_i,\ldots, & b\gamma m_n + \frac{\beta\pi_2}{\pi_1}n_n, \\
c\delta n_1 + \frac{\gamma\pi_3}{\pi_2}p_1, & c\delta n_2 + \frac{\gamma\pi_3}{\pi_2}p_2,\ldots, & c\delta n_i + \frac{\gamma\pi_3}{\pi_2}p_i,\ldots, & c\delta n_n + \frac{\gamma\pi_3}{\pi_2}p_n, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
k\lambda s_1 + \frac{\varkappa\pi_n}{\pi_{n-1}}t_1, & k\lambda s_2 + \frac{\varkappa\pi_n}{\pi_{n-1}}t_2,\ldots, & k\lambda s_i + \frac{\varkappa\pi_n}{\pi_{n-1}}t_i,\ldots, & k\lambda s_n + \frac{\varkappa\pi_n}{\pi_{n-1}}t_n.
\end{array}$$

On reconnaît bien facilement qu'un pareil système provient de la composition des deux autres, que voici :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{llll}
m_1, & m_2,\ldots, & m_i,\ldots, & m_n, \\
n_1, & n_2,\ldots, & n_i,\ldots, & n_n, \\
p_1, & p_2,\ldots, & p_i,\ldots, & p_n, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s_1, & s_2,\ldots, & s_i,\ldots, & s_n, \\
t_1, & t_2,\ldots, & t_i,\ldots, & t_n,
\end{array}\right\}$$

et

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{lllll}
\pi_1, & b\gamma, & 0, & 0,\ldots, & 0, \\
0, & \frac{\beta\pi_2}{\pi_1}, & c\delta, & 0,\ldots, & 0, \\
0, & 0, & \frac{\gamma\pi_3}{\pi_2}, & d\varepsilon,\ldots, & 0, \\
0, & 0, & 0, & \frac{\delta\pi_4}{\pi_3},\ldots, & 0, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0, & 0, & 0, & 0,\ldots, & k\lambda, \\
0, & 0, & 0, & 0,\ldots, & \frac{\varkappa\pi_n}{\pi_{n-1}};
\end{array}\right\}$$

donc son déterminant, et, par suite, celui du système (C) est le produit des déterminants de ces deux systèmes.

Or le déterminant du système (2) se réduit à son terme principal

$$\beta\gamma\ldots\varkappa\pi_n$$

ou simplement

$$\beta\gamma\ldots\varkappa,$$

puisque π_n est l'unité; la condition proposée

$$C = \pm\beta\gamma\ldots\varkappa$$

sera donc remplie en prenant égal à l'unité en valeur absolue le déterminant des n^2 nombres entiers du système (1), ce qui est la conclusion que nous avions annoncée, et qu'il s'agissait d'obtenir.

SUR L'INTÉGRALE DÉFINIE

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx;$$

PAR M. BESGE.

On sait depuis longtemps et on a prouvé de bien des manieres que l'intégrale définie

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx$$

est une fonction discontinue de a, évidemment nulle pour $a = 0$, mais égale à $\frac{\pi}{2}$ pour a positive, à $-\frac{\pi}{2}$ pour a négative. Peut-être cependant me pardonnera-t-on, en faveur de la simplicité du procédé, d'indiquer ici comment on doit, suivant moi, démontrer ces résultats dans un traité élémentaire.

J'observe d'abord qu'on a

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xy}\,dy;$$

donc

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \int_0^\infty \sin ax\,dx \int_0^\infty e^{-xy}\,dy.$$

En intervertissant l'ordre des intégrations, le second membre de cette dernière équation devient

$$\int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-xy} \sin ax\,dx,$$

et à cause de

$$\int_0^\infty e^{-xy} \sin ax\, dx = \frac{a}{a^2+y^2},$$

il se réduit à

$$\int_0^\infty \frac{a\,dy}{a^2+y^2},$$

c'est-à-dire à $\frac{\pi}{2}$, 0, ou $-\frac{\pi}{2}$, suivant que a est positive, nulle ou négative. Telle est donc aussi la valeur de

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\, dx,$$

dans les mêmes circonstances; ce qu'il fallait démontrer.

Sur la convergence des séries qui se présentent dans la théorie du mouvement elliptique des planètes;

PAR M. PUISEUX,

Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.

Soient r le rayon vecteur d'une planète, u l'anomalie excentrique, v l'anomalie vraie, ζ l'anomalie moyenne, e l'excentricité de l'orbite. Laplace a démontré le premier que les séries qui expriment r et v suivant les puissances croissantes de e sont convergentes pour toutes les valeurs de cette dernière quantité inférieures à une certaine limite; cette limite est déterminée par une équation transcendante et a pour valeur approchée 0.66195.... Laplace arrive à ce résultat en montrant que, dans l'expression de x, chaque terme d'un rang très-élevé i est au plus égal en valeur absolue à une quantité de la forme

$$\frac{A}{i\sqrt{i}}\left(\frac{e}{\lambda}\right)^i,$$

A et λ désignant des quantités finies indépendantes de i; alors il en conclut que la série est convergente tant que l'on a $e < \lambda$. Il applique un procédé analogue à la série qui exprime v.

M. Cauchy a traité la même question d'une autre manière, en s'appuyant sur un théorème dont l'analyse lui est redevable, savoir, qu'une fonction est développable en série convergente suivant les puissances entières et croissantes de la variable, tant que le module de cette variable est inférieur au plus petit de ceux pour lesquels la fonction et sa dérivée deviennent discontinues. M. Cauchy détermine ce plus petit module dans le cas où l'anomalie moyenne est égale à $\frac{\pi}{2}$, et il retrouve le nombre 0.66195.... donné par Laplace; mais

il me semble que cela ne suffit pas. Il n'est pas évident, en effet, que si les séries qui expriment r et v sont convergentes pour $\zeta = \frac{\pi}{2}$, elles le seront encore pour *toute autre valeur* de ζ; car si la supposition de $\zeta = \frac{\pi}{2}$ fait prendre à certains termes leur valeur absolue maximum, elle en annule d'autres; de plus, elle rend les uns positifs, les autres négatifs. On conçoit, à priori, que le plus petit module de e, pour lequel r, v et leurs dérivées deviennent discontinues, doive dépendre de ζ, et il me paraît nécessaire de démontrer que ce plus petit module est minimum pour $\zeta = \frac{\pi}{2}$; alors seulement on pourra conclure que les séries dont il s'agit sont convergentes, *quel que soit* ζ, pour les valeurs de e inférieures à 0,66195.... La démonstration dont je viens d'indiquer la nécessité est l'objet de cet article [*].

En vertu des formules connues

$$u - e \sin u = \zeta, \quad r = a(1 - e \cos u), \quad \cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u},$$

u, r et v sont des fonctions de e et de ζ; en regardant ζ comme constant, on a

$$\frac{du}{de} = \frac{\sin u}{1 - e \cos u}, \quad \frac{dr}{de} = \frac{a(e - \cos u)}{1 - e \cos u}, \quad \frac{dv}{de} = \frac{(2 - e \cos u - e^2) \sin u}{\sqrt{1 - e^2}(1 - e \cos u)^2}.$$

On conclut de là et du théorème de M. Cauchy que les développements en séries ordonnées par rapport à e de u, r, v et aussi de r^m, $\sin mu$, $\cos mu$, $\sin mv$, $\cos mv$ resteront convergents tant que le module de e sera inférieur au plus petit des modules de cette quantité pour lesquels on a

$$1 - e \cos u = 0, \quad \text{ou bien} \quad 1 - e^2 = 0.$$

---

[*] Dans la marche suivie par Laplace, on n'a pas besoin de cette démonstration et on a de plus l'avantage de trouver l'expression approchée d'un terme de rang élevé, ce qui permet d'apprécier la rapidité avec laquelle la série converge. Mais Laplace est obligé de traiter séparément les séries qui expriment r et v, et ses raisonnements devraient être encore modifiés pour chacune des quantités u, $\sin mu$, $\cos mu$, $\sin mv$, $\cos mv$, r^m, etc., tandis que le théorème de M. Cauchy s'applique à la fois à tous ces développements.

Si donc on détermine les inconnues x et y par les deux équations

$$(1) \qquad 1 - x\cos y = 0, \quad y - x\sin y = \zeta,$$

et qu'on appelle h le module de celle des valeurs de x qui a le plus petit module, les séries dont il s'agit seront convergentes tant que le module de e sera moindre à la fois que h et que l'unité.

Dans le cas de $\zeta = \frac{\pi}{2}$, on trouve aisément $h = 0{,}66195\ldots$, nombre plus petit que 1; si je fais voir que quand ζ a une valeur autre que $\frac{\pi}{2}$, h ne peut être moindre que $0{,}66195\ldots$, il sera donc établi que les séries en question sont convergentes, *quel que soit* ζ, tant que le module de e est inférieur à $0{,}66195\ldots$.

Remarquons d'abord qu'on peut, sans changer le module de x, supposer dans les équations (1) ζ compris entre zéro et π; car si l'on y fait

$$\zeta = \zeta' + 2k\pi, \quad y = y' + 2k\pi,$$

k étant entier, il viendra

$$1 - x\cos y' = 0, \quad y' - x\sin y' = \zeta',$$

équations où x a les mêmes valeurs que dans les équations (1), et où ζ' peut être supposé compris entre zéro et 2π. Si, maintenant, ζ' était plus grand que π, on ferait

$$\zeta' = \pi - \zeta'', \quad y' = \pi - y'', \quad x = -x'',$$

et il viendrait

$$1 - x''\cos y'' = 0, \quad y'' - x''\sin y'' = \zeta'',$$

équations pareilles aux équations (1) et où ζ'' est compris entre zéro et π. Il est vrai que les valeurs de x'' sont de signes contraires à celles de x; mais leurs modules sont les mêmes. Je supposerai donc, dans ce qui suit, ζ positif et moindre que π.

Représentons par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ celle des valeurs de x tirées des équations (1) dont le module $h = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ est le plus petit; soit

$\gamma + \delta\sqrt{-1}$ la valeur correspondante de y. On déduit de ces mêmes équations

$$x = \frac{1}{\cos y}, \quad \text{ou bien} \quad \alpha + \beta\sqrt{-1} = \frac{1}{\cos(\gamma + \delta\sqrt{-1})};$$

il en résulte

$$\alpha - \beta\sqrt{-1} = \frac{1}{\cos(\gamma - \delta\sqrt{-1})},$$

et, par conséquent,

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 \quad \text{ou} \quad h^2 \\ = \dfrac{1}{\cos(\gamma + \delta\sqrt{-1})\cos(\gamma - \delta\sqrt{-1})} = \dfrac{4}{c^{2\delta} + c^{-2\delta} + 2\cos 2\gamma}. \end{cases}$$

c désignant la base des logarithmes népériens. D'un autre côté, en éliminant x entre les équations (1), on trouve

$$\zeta - y = -\frac{\sin y}{\cos y},$$

ou bien

$$\zeta - \gamma - \delta\sqrt{-1} = -\frac{\sin(\gamma + \delta\sqrt{-1})}{\cos(\gamma + \delta\sqrt{-1})} = -\frac{2\sin 2\gamma + (c^{2\delta} - c^{-2\delta})\sqrt{-1}}{c^{2\delta} + c^{-2\delta} + 2\cos 2\gamma},$$

ou encore, en séparant les parties réelles et les parties imaginaires,

$$(3) \qquad \zeta - \gamma = -\frac{2\sin 2\gamma}{c^{2\delta} + c^{-2\delta} + 2\cos 2\gamma},$$

$$(4) \qquad \delta = \frac{c^{2\delta} - c^{-2\delta}}{c^{2\delta} + c^{-2\delta} + 2\cos 2\gamma}.$$

L'équation (4) admet la solution $\delta = 0$; mais ce n'est pas celle qui répond au plus petit module de x; en effet, il en résulterait, d'après la formule (2),

$$h^2 = \frac{2}{1 + \cos 2\gamma} = \frac{1}{\cos^2\gamma},$$

d'où $h > 1$, tandis qu'en supposant δ différent de zéro, on a, en vertu des équations (2) et (4),

$$h^2 = \frac{4\delta}{c^{2\delta} - c^{-2\delta}} = \frac{1}{1 + \dfrac{(2\delta)^2}{1.2.3} + \dfrac{(2\delta)^4}{1.2\ 3.4.5} + \ldots}.$$

d'où $h < 1$.

On peut donc diviser l'équation (4) par δ et l'écrire

$$e^{2\delta} + e^{-2\delta} + 2\cos 2\gamma = 4\left[1 + \frac{(2\delta)^2}{1.2.3} + \frac{(2\delta)^4}{1.2.3.4.5} + \ldots\right];$$

alors l'équation (3) devient

$$(5) \qquad \zeta - \gamma = -\frac{\sin 2\gamma}{2\left[1 + \frac{(2\delta)^2}{1.2.3} + \ldots\right]},$$

formule dont les conséquences nous seront utiles.

Elle nous montre d'abord que la différence entre ζ et γ est en valeur absolue moindre que $\frac{1}{2}$. Distinguons ensuite deux cas, selon que ζ est plus grand ou plus petit que γ. Dans le premier cas, comme ζ est positif et moindre que π, γ sera compris entre $-\frac{1}{2}$ et π: mais $\sin 2\gamma$ étant négatif en vertu de l'équation (5), γ ne peut tomber entre zéro et $\frac{\pi}{2}$; il ne peut être non plus entre $-\frac{1}{2}$ et zéro; car soit, s'il est possible, $\gamma = -\gamma'$, γ' étant positif et moindre que $\frac{1}{2}$, on aurait

$$\zeta + \gamma' = \frac{\sin 2\gamma}{2\left[1 + \frac{(2\delta)^2}{1.2.3} + \ldots\right]},$$

d'où il suivrait

$$\gamma' < \frac{\sin 2\gamma'}{2}, \quad 2\gamma' < \sin 2\gamma'.$$

ce qui est absurde. Il faut donc que γ soit compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, et comme ζ, par hypothèse, surpasse γ, on en conclut que ζ surpasse $\frac{\pi}{2}$: ainsi, lorsque $\zeta - \gamma$ est positif, $\zeta - \frac{\pi}{2}$ l'est aussi.

Dans le second cas, c'est-à-dire lorsque ζ est moindre que γ, γ est nécessairement compris entre zéro et $\pi + \frac{1}{2}$; mais $\sin 2\gamma$ étant positif en vertu de l'équation (5), γ ne peut tomber entre $\frac{\pi}{2}$ et π; il ne peut etre

non plus entre π et $\pi + \frac{1}{2}$: car soit, s'il est possible, $\gamma = \pi + \gamma'$, γ' étant positif et moindre que $\frac{1}{2}$, on aurait

$$\gamma' + \pi - \zeta = \frac{\sin 2\gamma'}{2\left[1 + \frac{(2\delta)^2}{1.2.3} + \ldots\right]},$$

d'où il suivrait, comme tout à l'heure, l'inégalité absurde

$$2\gamma' < \sin 2\gamma'.$$

Il faut donc que γ soit compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, et comme ζ est, par hypothèse, moindre que γ, on en conclut que ζ est moindre que $\frac{\pi}{2}$: ainsi, lorsque $\zeta - \gamma$ est négatif, $\zeta - \frac{\pi}{2}$ l'est aussi. On voit donc que $\zeta - \gamma$ est toujours de même signe que $\zeta - \frac{\pi}{2}$, de sorte qu'on peut faire

$$\zeta - \gamma = \theta\left(\zeta - \frac{\pi}{2}\right),$$

θ étant essentiellement positif.

Ceci établi, revenons aux équations (1); en y regardant ζ comme variable, la seconde nous donne

$$(1 - x\cos y)\frac{dy}{d\zeta} - \sin y\frac{dx}{d\zeta} = 1,$$

ou, en ayant égard à la première,

$$-\sin y\frac{dx}{d\zeta} = 1,$$

$$\frac{dx}{d\zeta} = -\frac{1}{\sin y} = \frac{x}{\zeta - y},$$

ou encore

$$\frac{d\alpha}{d\zeta} + \frac{d\beta}{d\zeta}\sqrt{-1} = \frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{\zeta - \gamma - \delta\sqrt{-1}} = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})(\zeta - \gamma + \delta\sqrt{-1})}{(\zeta - \gamma)^2 + \delta^2}.$$

Cette équation se décompose dans les deux suivantes :

$$\frac{d\alpha}{d\zeta} = \frac{\alpha(\zeta-\gamma)-\beta\delta}{(\zeta-\gamma)^2+\delta^2},$$

$$\frac{d\beta}{d\zeta} = \frac{\beta(\zeta-\gamma)+\alpha\delta}{(\zeta-\gamma)^2+\delta^2};$$

il en résulte

$$\frac{\alpha\,d\alpha+\beta\,d\beta}{d\zeta} = \frac{(\alpha^2+\beta^2)(\zeta-\gamma)}{(\zeta-\gamma)^2+\delta^2},$$

ou bien

$$\frac{dh}{d\zeta} = \frac{h(\zeta-\gamma)}{(\zeta-\gamma)^2+\delta^2} = \frac{h\varrho}{(\zeta-\gamma)^2+\delta^2}\left(\zeta-\frac{\pi}{2}\right).$$

On conclut de là que ζ croissant de zéro à $\frac{\pi}{2}$, le module h ira en diminuant, et qu'ensuite, ζ croissant de $\frac{\pi}{2}$ à π, le même module ira en augmentant. Il est donc minimum pour $\zeta = \frac{\pi}{2}$, ce que nous nous proposions de démontrer.

SUR QUELQUES TRANSMUTATIONS DES LIGNES COURBES;

PAR M. A. CAYLEY.

Je suppose qu'une courbe quelconque soit représentée par une équation homogène entre trois variables x, y, z, et je me propose d'examiner (en ne faisant attention qu'aux droites et aux coniques) ce que signifient les transmutations

$$\text{I.} \qquad \xi = \sqrt{x}, \quad \eta = \sqrt{y}, \quad \zeta = \sqrt{z},$$

$$\text{II.} \qquad \xi = x^2, \quad \eta = y^2, \quad \zeta = z^2,$$

$$\text{III.} \qquad \xi = \frac{1}{x}, \quad \eta = \frac{1}{y}, \quad \zeta = \frac{1}{z}.$$

ces quantités étant prises dans chaque cas pour de nouvelles coordonnées. Les théorèmes auxquels on se trouve conduit comprennent les théorèmes qu'obtient M. William Roberts par sa méthode générale de transmutation en écrivant $n = \frac{1}{2}$, $n = 2$. (*Voir* sa Note sur ce sujet, tome XIII de ce Journal, page 209 [*]).

I. Soit

$$\xi = \sqrt{x}, \quad \eta = \sqrt{y}, \quad \zeta = \sqrt{z}.$$

Je supposerai ici et partout dans ce Mémoire que PQR soit le triangle

[*] M. William Roberts a bien voulu me parler l'été passé à Dublin, avant que ce Mémoire eût paru, des théorèmes qui devaient s'y trouver. Cela me suggéra, et je lui communiquai, peu de jours après, la deuxième et la troisième de mes méthodes de transmutation. On verra dans la suite que ce sont la première et la deuxième de mes méthodes qui correspondent aux cas $n = \frac{1}{2}$, $n = 2$, respectivement, mais que la troisième est aussi très-étroitement liée avec le cas $n = \frac{1}{2}$.

formé par les droites

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Cela posé, en considérant les nouvelles coordonnées ξ, η, ζ, on voit de suite qu'un système d'équations telles que

$$\xi : \eta : \zeta = \alpha : \beta : \gamma$$

correspond à un point; qu'une équation linéaire quelconque

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0$$

correspond à une conique qui touche les trois côtés du triangle PQR (ou, si l'on veut, inscrite à ce triangle); et qu'une équation quelconque du second ordre

$$a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2f\zeta\eta + 2g\xi\zeta + 2h\eta\xi = 0$$

correspond à une courbe du quatrième ordre qui touche les trois côtés du triangle PQR, chaque côté deux fois. Et réciproquement, de telles coniques et de telles courbes du quatrième ordre peuvent toujours se représenter par une équation linéaire ou par une équation du second ordre entre les coordonnées ξ, η, ζ.

On déduit de là cette propriété générale :

« Tout théoreme descriptif qui se rapporte à des points, à des droites, » et à des coniques, conduit à un théoreme qui se rapporte d'une ma- » niere analogue à des points, à des coniques qui touchent chacune » trois droites fixes, et à des courbes du quatrième ordre qui tou- » chent chacune ces trois droites fixes, deux fois chaque droite. »

En supposant que les coefficients g, h se réduisent à zéro, l'équation

$$a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2f\eta\zeta = 0$$

est celle d'une conique tangente aux deux droites PQ, PR, et la courbe du quatrième ordre se réduit à deux coniques égales et superposées l'une à l'autre. De là :

« Tout théorème descriptif qui se rapporte à des points, à des droites, » et à une conique, conduit à un théoreme qui se rapporte d'une ma- » niere analogue à des points, à des coniques qui touchent chacune

» trois droites fixes, et à une conique qui touche deux de ces droites
» fixes. »

En particulier, en supposant que les deux droites fixes que la conique touche soient les deux droites tangentes à cette conique qui passent par un des foyers, et que la troisième droite fixe soit à l'infini :

« Tout théorème descriptif qui se rapporte à des points, à des droites,
» et à une conique, conduit à un théorème qui se rapporte d'une ma-
» nière analogue à des points, à des paraboles qui ont pour foyer com-
» mun un point fixe, et à une conique qui a aussi ce point fixe pour
» un de ses foyers. »

II. Soit à présent

$$\xi = x^2, \quad \eta = y^2, \quad \zeta = z^2.$$

Un systeme d'équations telles que

$$\xi : \eta : \zeta = \alpha : \beta : \gamma$$

correspond à quatre points qui formeront ce que l'on peut nommer *un système symétrique par rapport aux points* P, Q, R, ou tout simplement *un système symétrique*. On voit sans peine que les quatre points d'un même système symétrique sont tels, que le quadrilatère formé par ces quatre points a pour points de concours des diagonales et des côtés opposés les points P, Q, R. Pour ne pas interrompre la suite des raisonnements, il convient d'entrer dans quelques détails relatifs à ce sujet. Nous nommerons *courbe symétrique par rapport aux points* P, Q, R, ou simplement *courbe symétrique*, toute courbe lieu d'un système symétrique. Cela posé, il y a une infinité de coniques symétriques; savoir, toute conique par rapport à laquelle les points P, Q, R sont des points conjugués (cela veut dire par rapport à laquelle l'un quelconque de ces points a pour polaire la droite menée par les deux autres) est une conique symétrique. Remarquons qu'une courbe symétrique du quatrième ordre peut se réduire à un système de deux coniques telles, que les points de chaque système symétrique de la courbe soient partagés deux à deux sur les deux coniques. En effet, considérons une conique telle, que, par rapport à cette co-

nique, le point P ait pour polaire la droite QR. Il est facile de construire une autre conique telle, que l'ensemble des deux coniques soit une courbe symétrique. Pour cela, menons une transversale quelconque PMN qui rencontre la conique donnée aux points M, N. Soient M′, N′ les points de rencontre des droites QM, NR et des droites QN, MR; le lieu des deux points M′, N′ (lesquels seront en ligne droite avec le point P) sera la conique dont il s'agit. Nous dirons que les deux coniques sont des coniques supplémentaires.

En revenant à notre but actuel, une équation linéaire quelconque

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0$$

correspond à une conique symétrique. Une équation du second ordre quelconque

$$a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2f\eta\zeta + 2g\zeta\xi + 2h\xi\eta = 0$$

correspond à une courbe symétrique du quatrième ordre. Et réciproquement, toute conique symétrique ou toute courbe symétrique du quatrième ordre peut se représenter par une équation linéaire ou du second ordre avec les coordonnées ξ, η, ζ. De là cette propriété générale :

« Tout théorème descriptif qui se rapporte à des points, à des droites, » et à des coniques, conduit à un théorème qui se rapporte d'une ma- » nière analogue à des systèmes symétriques (par rapport à trois points » fixes), à des coniques symétriques, et à des courbes symétriques du » quatrième ordre. »

Dans ce théorème on peut, si l'on veut, considérer l'un des points d'un système symétrique comme représentant le système, et substituer aux mots *systèmes symétriques* (par rapport à trois points fixes), le mot *points*.

En supposant que dans la courbe du quatrième ordre on ait à la fois

$$ac - g^2 = 0, \quad ab - h^2 = 0,$$

il est facile de voir que la courbe du quatrième ordre se réduit à deux coniques supplémentaires.

En effet, ces conditions étant remplies, en rétablissant les valeurs

de ξ, η, ζ, on obtient une équation qui se divise en deux équations, telles que

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - \delta yz = 0, \quad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta yz = 0,$$

qui appartiennent, comme on le voit sans peine, à une paire de coniques supplémentaires.

De là, en remarquant qu'il est permis de faire abstraction de l'une de ces coniques :

« Tout théorème qui se rapporte à des points, à des droites, et à » une conique, conduit à un théorème qui se rapporte d'une ma- » nière analogue à des points, à des coniques symétriques (par rap- » port à trois points fixes), et à une conique telle, que, par rapport » à cette conique, l'un des trois points fixes a pour polaire la droite » menée par les deux autres points fixes. »

Supposons en particulier que les deux points fixes dont nous venons de parler soient les points où la droite à l'infini est rencontrée par un cercle qui a pour centre le troisième point fixe; ce troisième point fixe sera le centre tant des coniques symétriques par rapport à ces trois points fixes, que de la conique par rapport à laquelle le troisième point fixe a pour polaire la droite menée par les deux autres points fixes. De plus, les asymptotes de l'une quelconque des coniques symétriques formeront avec les droites imaginaires asymptotes du cercle un faisceau harmonique, et de là les asymptotes de la conique dont il s'agit seront à angle droit, ou, autrement dit, cette conique sera une hyperbole équilatère. De là enfin :

« Tout théorème descriptif qui se rapporte à des points, à des » droites, et à une conique, conduit à un théorème qui se rapporte » d'une manière analogue à des points, à des hyperboles équilatères et » concentriques, et à une conique concentrique avec les hyperboles. »

III. Soit enfin

$$\xi = \frac{1}{x}, \quad \eta = \frac{1}{y}, \quad \zeta = \frac{1}{z}.$$

Cette supposition conduit à l'une des méthodes de transmutation données par M. Steiner parmi les observations générales qui forment la conclusion de son ouvrage intitulé : *Systematische Eulivi-*

chelung, etc., méthode qu'obtient M. Steiner au moyen de la théorie de l'hyperboloïde gauche. Je la reproduis ici tant pour en faire voir la théorie analytique qu'à cause de son analogie avec les méthodes I et II. Il est évident d'abord qu'un système d'équations telles que

$$\xi : \eta : \zeta = \alpha : \beta : \gamma$$

correspond à un point; de même, une équation linéaire quelconque, telle que

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0,$$

correspond à une conique qui passe par les trois points P, Q, R, et une équation quelconque du second ordre, telle que

$$a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2f\eta\zeta + 2g\zeta\xi + 2h\xi\eta = 0,$$

correspond à une courbe du quatrième ordre qui a les trois points P, Q, R pour points doubles. Réciproquement, de telles coniques et de telles courbes du quatrième ordre peuvent toujours se représenter par des équations linéaires et par des équations du second ordre. De là :

« Tout théorème descriptif qui se rapporte à des points, à des droites, » et à des coniques, conduit à un théorème qui se rapporte d'une ma- » nière analogue à des points, à des coniques qui passent par trois » points fixes, et à des courbes du quatrième ordre qui ont ces trois » points fixes pour points doubles. »

En supposant que l'on ait à la fois $a = 0$, $b = 0$, la courbe du quatrième ordre se réduit à une conique qui passe par les deux points Q, R (ou, si l'on veut, au système formé de cette conique et des droites PQ, PR). De là :

« Tout théorème descriptif qui se rapporte à des points, à des droites, » et à une conique, conduit à un théorème qui se rapporte d'une ma- » nière analogue à des points, à des coniques qui passent par trois » points fixes, et à une conique qui passe par deux de ces points fixes. »

On ne peut pas particulariser ce théorème de manière à obtenir des théorèmes intéressants. Mais, en prenant les polaires réciproques des deux théorèmes qui viennent d'être obtenus, on a ces propriétés nouvelles :

« Tout théoreme descriptif qui se rapporte a des droites, a des » points, et à des coniques, conduit a un théoreme qui se rapporte » d'une maniere analogue à des droites, à des coniques qui touchent » chacune trois droites fixes, et à des courbes de la *quatrième classe* » qui touchent chacune ces mêmes droites fixes, deux fois chaque » droite. »

Et :

« Tout théoreme qui se rapporte à des droites, à des points, et a » une conique, conduit a un théoreme qui se rapporte d'une maniere » analogue à des droites, à des coniques qui touchent chacune trois » droites fixes, et a une conique qui touche deux de ces droites » fixes. »

Et de la, comme dans la méthode I :

« Tout théoreme qui se rapporte à des droites, a des points, et a » une conique, conduit a un théoreme qui se rapporte d'une maniere » analogue à des droites, à des paraboles qui ont pour foyer com- » mun un point fixe, et à une conique qui a ce même point fixe pour » un de ses foyers. »

Théorème que l'on doit comparer avec le troisieme théoreme que donne la méthode I.

Pour compléter cette theorie, nous aurions dû ajouter les deux théoremes polaires réciproques du premier et du deuxieme théoreme que donne la méthode I : mais cela se fait sans la moindre peine. Quant au premier et au deuxieme théoreme que donne la méthode II, les polaires réciproques de ces deux théoremes ne conduisent a rien de nouveau.

OBSERVATION SUR UNE NOTE DE M. LOBATTO;

PAR M. J.-A. SERRET.

Dans une Note publiée au tome IX de ce Recueil, page 177, M. Lobatto a fait connaître une propriété curieuse appartenant à une classe assez étendue d'équations du troisième degré dont les racines sont réelles. Voici quelle est cette propriété :

L'équation du troisième degré étant ramenée à la forme

$$x^3 - px + q = 0,$$

où p et q sont positifs, si l'on pose $r = \sqrt{4p^3 - 27q^2}$ et

$$\frac{9q - r}{2r} = A, \quad \frac{p}{r} = B, \quad \frac{3p}{r} = A', \quad \frac{9q + r}{2r} = B',$$

d'où il suit nécessairement $AB' - BA' = -1$, il arrivera, si A, B, A', B' sont des entiers, qu'en développant en fraction continue les trois racines de l'équation proposée, ces trois fractions continues se termineront par les mêmes quotients incomplets.

M. Lobatto prouve bien dans son Mémoire que A, B, A', B' doivent être entiers, pour que cette propriété ait lieu, mais il ne prouve pas du tout que cela suffit. La démonstration peut se faire en quelques mots. Si l'on désigne par $-x$ la racine négative de la proposée, par x_1 et x_2 les deux racines positives, on a

$$x_1 = \frac{Ax + B}{A'x + B'}, \quad x_2 = \frac{B'x + B}{A'x + A},$$

ainsi que M. Lobatto l'a trouvé. Nous ne considérerons que x_1, la même chose ayant lieu pour x_2. Si x était > 1, $A > B$, $A' > B'$, x serait un quotient complet de la fraction continue égale à x_1 ; car, à

cause de $AB' - BA' = -1$, on peut considérer $\frac{A}{A'}$ et $\frac{B}{B'}$ comme deux réduites successives d'une même fraction continue : notre propriété serait donc démontrée. Cela n'ayant pas lieu, soit $x = a + \frac{1}{y}$. a étant l'entier le plus grand contenu dans x; on aura

$$x_1 = \frac{(Aa + B)y + A}{(A'a + B')y + A'} = \frac{Cy + A}{C'y + A'},$$

et l'on a ici $C > A$, $C' > A'$ et $CA' - AC' = +1$: donc y sera un quotient complet de x_1, et notre propriété est démontrée.

Ceci suppose que a n'est pas nul ou que $x > 1$; mais si le contraire avait lieu, on poserait $y = b + \frac{1}{z}$, et l'on prouverait, comme précédemment, que z est alors un quotient complet de x_1.

MÉMOIRE

Sur les vibrations des gaz dans des tuyaux cylindriques, coniques, etc.;

PAR M. J.-M.-C. DUHAMEL.

(Présenté à l'Académie des Sciences, le 8 avril 1839.)

Les diverses questions traitées dans ce Mémoire se rapportent principalement au mouvement vibratoire des gaz renfermés dans des tuyaux cylindriques ou coniques.

L'objet que je m'étais proposé d'abord, en commençant ces recherches, avait été de lever quelques doutes exprimés par M. Dulong, sur la vitesse de propagation du son dans les gaz renfermés dans des tuyaux, et sur l'influence que pouvait avoir sur le ton le mouvement des molécules dans le sens perpendiculaire à l'axe du tuyau. Ces questions en ont amené d'autres que je vais indiquer succinctement, ainsi que les conséquences principales auxquelles elles m'ont conduit.

Les équations dont j'ai fait usage sont celles que l'on emploie ordinairement dans l'hydrodynamique, modifiées, comme on le sait, par la chaleur développée par la condensation.

Je les ai d'abord appliquées au mouvement de l'air dans un tuyau cylindrique, indéfini dans les deux sens, et de forme quelconque. M. Poisson, dans son premier Mémoire sur la propagation du son dans l'air indéfini, considère, au lieu du mouvement de chaque molécule, le mouvement moyen de celles qui composent une même couche sphérique, ayant son centre en l'un des points de la partie très-limitée du fluide, que l'on suppose primitivement ébranlé. Dans

le cas d'un tuyau cylindrique, c'est le mouvement moyen dans une section droite que je considère; mais il y a ici une difficulté de plus, provenant de la paroi du tuyau, qui oblige les molécules en contact avec elle à ne pas s'en séparer pendant tout le mouvement. En introduisant cette condition, et supposant une forme arbitraire à la section droite du tuyau, j'ai démontré que le mouvement se propagera dans l'air qui y est renfermé avec la même vitesse que dans l'air libre. D'où il résulte évidemment que la vitesse de propagation n'est pour rien dans la différence observée entre les résultats de l'expérience et ceux du calcul.

La même analyse conduit à une autre conséquence qui mérite d'être remarquée.

Lorsque l'ébranlement primitif, supposé d'une très-petite étendue, s'est propagé jusqu'à la paroi du tuyau, il s'y réfléchit, revient sur lui-même, se réfléchit de nouveau, et ainsi de suite indéfiniment. La propagation a lieu en même temps dans le sens de la longueur, et le mouvement va en s'affaiblissant constamment sans s'éteindre complétement dans aucune des sections par lesquelles il a passé. Or il est à remarquer qu'à partir de l'instant où une section quelconque est atteinte par le mouvement, la vitesse moyenne des molécules qu'elle renferme, estimée dans le sens de la longueur du tuyau, conserve une valeur différente de zéro, pendant un temps déterminé qui est le même pour toutes les sections; et qu'ensuite cette vitesse moyenne reste nulle indéfiniment, quoique le mouvement ne soit pas anéanti dans la section. Cet intervalle constant est égal au temps que l'épaisseur de l'ébranlement primitif met à traverser la section; il a pour valeur cette épaisseur divisée par la vitesse de propagation du mouvement.

Après avoir déterminé la vitesse de propagation du mouvement, j'ai calculé le mouvement même de chaque molécule en particulier, en supposant que la section droite du cylindre indéfini soit un cercle, et que, pour les points d'une même section, l'état initial ne dépende que de la distance à l'axe. La solution est donnée par deux séries d'intégrales définies doubles. J'ai examiné, en particulier, le cas où le mouvement est le même dans toutes les sections, et dirigé dans le sens des rayons. Le système repasse périodiquement par les mêmes

états quand on ne considère que l'un des mouvements simples, dont la superposition forme le mouvement le plus général. Les nombres de vibrations exécutées pendant un même temps, dans ces différents mouvements simples, sont proportionnels aux racines d'une équation transcendante. Les surfaces nodales correspondantes à chacun de ces mouvements sont déterminées très-simplement au moyen des racines de cette même équation. Les distances de ces surfaces consécutives ne sont pas les mêmes, et elles conservent les mêmes rapports entre elles quand on fait varier le diamètre du tuyau; elles sont proportionnelles à ce diamètre, ainsi que la durée des vibrations.

Je passe ensuite au cas d'une application plus immédiate, où le tuyau est limité dans les deux sens, et je cherche l'influence que les mouvements perpendiculaires à l'axe peuvent avoir sur le son produit.

Le mouvement le plus général est représenté par des séries de mouvements simples superposés, qui correspondent chacun à un son unique. Le plus grave de tous est celui que la théorie connue avait donné, et qui diffère très-peu de celui que donne l'expérience dans des tuyaux dont la largeur est très-petite par rapport à la longueur.

Le plus grave après celui-ci est tellement élevé au-dessus de lui, quand il y a des mouvements perpendiculaires à l'axe, que l'on peut affirmer que *de pareils mouvements ne sont pour rien dans la différence qui existe entre l'expérience et la théorie qu'on lui a comparée.*

Je suis parvenu à des conséquences semblables en considérant un tuyau prismatique au lieu d'un tuyau circulaire.

Je passe ensuite au mouvement de l'air dans des tuyaux coniques.

La première question que je traite est celle de la vitesse de propagation du mouvement, en supposant l'ébranlement primitif entièrement arbitraire. La surface conique a pour directrice une courbe fermée quelconque, et la question se trouve ainsi traitée de la manière la plus générale. La difficulté était plus grande dans ce cas que dans celui du cylindre. Mais je suis parvenu à la surmonter, et j'ai démontré que, dans ce cas général, la vitesse de propagation était la même que dans un milieu indéfini. On retrouve encore d'autres résultats analogues à ceux qu'avaient offerts les tuyaux cylindriques indéfinis.

J'ai encore cherché cette vitesse de propagation pour l'air compris entre deux plans indéfinis, en partant d'un ébranlement arbitraire. Le résultat a encore été le même.

J'étudie ensuite les sons rendus par des tuyaux d'une grandeur finie, ouverts ou fermés aux deux extrémités, ou bien ouverts à l'une quelconque des deux, et fermés à l'autre.

Daniel Bernoulli s'était occupé de cette question dans l'important Mémoire que tous les physiciens connaissent. Mais il n'a fait le calcul que dans le cas particulier où la plus petite base est nulle, et où, par conséquent, le tuyau a la forme d'un cône entier. Il reconnaît ne pouvoir appliquer son analyse au cas général; toutefois il considère certains troncs de cône particuliers. Ce sont ceux que l'on pourrait détacher du cône entier, en le coupant soit à un ventre, soit à un nœud, suivant que l'extrémité devra être ouverte ou fermée. Mais quoiqu'il ait soupçonné que certains résultats devaient avoir lieu pour tous les troncs de cône, il ne l'a pas démontré; et, pour la plupart des conséquences, elles n'étaient pas susceptibles d'être étendues par analogie, parce que leurs lois n'étaient pas assez simples.

Enfin, je considère en dernier lieu les sons que rendrait un tuyau formé par quatre faces planes, dont deux seulement seraient parallèles. Les surfaces nodales et les ventres dépendent alors de la résolution d'équations plus compliquées que dans les cas précédents. Lorsque des expériences exactes auront été faites sur les points nouveaux traités dans ce Mémoire, je m'empresserai de les comparer aux résultats indiqués par mon analyse.

Équations générales.

I. *Cas des gaz.* — Soient, dans l'état d'équilibre, D la densité du gaz, qui sera, par exemple, l'air atmosphérique, celle du mercure étant prise pour unité; p_0 sa force élastique, g la gravité et h la hauteur barométrique; on aura

$$p_0 = gh.$$

Désignons par ρ la densité variable de l'air en un point quelconque, par p sa pression, et par γ sa condensation; de sorte que l'on ait,

pour une température égale à celle de l'état naturel,

$$p = gh(1 + \gamma).$$

La condensation positive ou négative développe une quantité de chaleur positive ou négative, qui élève la température d'une quantité de même signe, que l'on peut regarder comme proportionnelle à la condensation, du moins quand elle n'est pas trop considérable. Cette élévation de température produit, dans la force élastique p de l'air, une augmentation qu'il n'est pas permis de négliger. En désignant par θ le nombre de degrés centésimaux dont la température v s'est élevée, et par α le coefficient 0,00366 de la dilatation de l'air, on aura la proportion

$$p : gh :: D(1 + \gamma)[1 + \alpha(v + \theta)] : D(1 + \alpha v),$$

d'où

$$p = gh(1 + \gamma)\frac{1 + \alpha v + \alpha\theta}{1 + \alpha v},$$

ou, en se bornant à la première puissance de α,

$$p = gh(1 + \gamma)(1 + \alpha\theta);$$

et enfin, en négligeant le produit $\gamma\theta$,

$$p = gh(1 + \gamma + \alpha\theta).$$

Si l'on remplaçait $\alpha\theta$, qui est sensiblement proportionnel à γ, par $k\gamma$, on aurait la formule employée par M. Poisson dans le Mémoire où il a calculé le premier le changement produit dans la vitesse du son par l'élévation de température, qui résulte du rapprochement des molécules en mouvement.

On sait que θ peut s'exprimer au moyen des deux chaleurs spécifiques c et c' de l'air, la première se rapportant à une pression constante, et la seconde à un volume constant pour la même masse; et l'on a

$$\alpha\theta = \gamma\left(\frac{c}{c'} - 1\right),$$

d'où résulte

$$p = gh\left(1 + \gamma\frac{c}{c'}\right).$$

Cela posé, nous supposerons que les vitesses, estimées suivant la direction des trois axes rectangulaires, soient les dérivées partielles d'une même fonction φ par rapport aux coordonnées x, y, z. On obtient ainsi, en posant

$$\frac{gh}{D}\cdot\frac{c}{c'} = a^2,$$

les deux équations suivantes :

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right),$$

$$(2) \qquad \gamma = -\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt};$$

et quand la fonction φ sera déterminée, on connaîtra, à chaque instant et en chaque point, la condensation $-\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}$; et les composantes de la vitesse, qui seront $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, et, par suite, la vitesse $\frac{d\varphi}{dr}$, estimée suivant la direction du rayon vecteur r, mené de l'origine au point que l'on considère.

Cas des liquides. — Soient D et p_0 la densité et la pression initiale, $D(1+h)$ et $p_0 + k$ ce que sont ces deux quantités à une même température, h et k étant deux accroissements simultanés, connus pour le liquide en question, et tous les petits accroissements simultanés de ces quantités étant supposés proportionnels à h et k, de sorte qu'on ait en même temps, à cette même température,

$$\rho = D(1+s), \quad p = p_0 + \frac{ks}{h}.$$

Soit θ l'élévation de température produite par la condensation s, et δ la dilatation cubique du liquide; on aura

$$\theta\delta = s\left(\frac{c}{c'} - 1\right).$$

Pour calculer l'augmentation de pression produite par l'élévation θ de la température, sans variation de densité, soit D' la densité, elle deviendrait $D'(1-\theta\delta)$ par l'accroissement de température θ, sans changement de pression; produisons maintenant une condensation $\theta\delta$, sans

changer la température, ce qui ramène la densité à sa valeur D', il en résultera une augmentation de pression $\frac{k}{h}\theta\delta$. L'ajoutant avec p, on aura la pression produite par la condensation s, en tenant compte du dégagement de chaleur. Ainsi,

$$p = p_0 + \frac{k}{h}\frac{c}{c'}s.$$

Les équations de l'hydrodynamique conduisent alors à

$$s = -\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right),$$

en posant

$$a^2 = \frac{1}{D}\frac{k}{h}\cdot\frac{c}{c'}.$$

Les équations sont donc de même forme pour les liquides et pour les gaz.

On retomberait dans le cas des gaz, en supposant

$$k = p_0 h,$$

et alors

$$a^2 = \frac{p_0}{D}\cdot\frac{c}{c'}.$$

Vitesse de propagation du mouvement de l'air dans un tuyau cylindrique quelconque.

II. Considérons un tuyau cylindrique inébranlable, rempli d'air ou d'un autre gaz quelconque, s'étendant indéfiniment dans les deux sens, et ayant pour section perpendiculaire à ses arêtes une courbe d'une forme quelconque. Supposons que, dans une très-petite partie du fluide, on ait produit en chaque point une certaine condensation, et imprimé certaines vitesses; lorsqu'on abandonnera le fluide à lui-même, le mouvement se propagera d'un point à un autre, et nous nous proposons ici de déterminer la vitesse de cette propagation: ce qui revient à connaître au bout de quel temps un point situé à une distance donnée de la partie ébranlée, commencera à se mettre en mouvement. On pourrait tirer quelques inductions à ce sujet de la considération de la superposition des petits mouvements; mais on ne peut réellement en tirer aucune conséquence, et il est indispensable, pour la solution rigoureuse de la question, d'employer les

équations générales avec les conditions spéciales qui se rapportent au cas actuel.

Les vitesses et la condensation initiales étant données,

$$\frac{d\varphi}{dt},\quad \frac{d\varphi}{dx},\quad \frac{d\varphi}{dy},\quad \frac{d\varphi}{dz},\quad \frac{d\varphi}{dr},\quad \text{pour}\quad t=0.$$

sont des fonctions connues de x, y, z qui ne sont différentes de zéro que pour les valeurs de x, y, z correspondantes aux points compris dans une portion de tuyau, très-peu étendue dans tous les sens. On connaît ainsi, à une constante arbitraire près, la valeur de φ, pour $t=0$.

Cela posé, prenons pour inconnue la valeur moyenne de φ, relative aux points d'une même section quelconque, perpendiculaire aux arêtes. L'ébranlement initial étant tout à fait arbitraire, cette valeur moyenne cessera d'être nulle pour une section en dehors de cet ébranlement, au moment même où le mouvement atteindra cette section. L'expression de cette moyenne sera

$$\frac{\int\int \varphi\, dy\, dz}{\int\int dy\, dz}.$$

ces intégrales se rapportant à l'aire entière de la section. Le diviseur $\int\int dy\, dz$ étant constant, il suffit de déterminer le numérateur, et nous poserons

$$\int\int \varphi\, dy\, dz = u,$$

d'où il résultera

$$\int\int \frac{d^2\varphi}{dx^2}\, dy\, dz = \frac{d^2u}{dx^2},\quad \int\int \frac{d^2\varphi}{dt^2}\, dy\, dz = \frac{d^2u}{dt^2}.$$

les intégrales étant toujours prises dans toute l'étendue de la surface de la section.

Cherchons maintenant à évaluer

$$\int\int \left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) dy\, dz.$$

Intégrons d'abord $\frac{d^2\varphi}{dy^2}\, dy$ entre les deux valeurs de y correspondantes

au même z, BC, *fig.* 1. Nous aurons ainsi

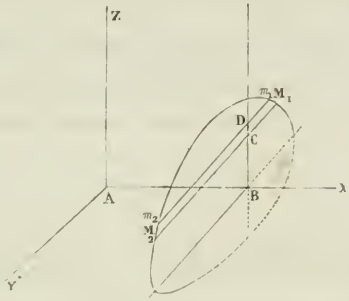
$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_2 - \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_1,$$

ces deux valeurs de $\frac{d\varphi}{dy}$ se rapportant respectivement aux deux points M_2, M_1. Il reste maintenant à former l'intégrale

$$\int \left[\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_2 - \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_1\right] dz$$

entre les deux valeurs extrêmes de z qui se rapportent aux points de la section où la tangente est parallèle à l'axe des y.

Fig. 1.



Si nous désignons, en général, par β, γ les angles formés avec les directions positives des y et z, par la direction extérieure de la normale à la surface du cylindre, que nous supposerons, pour plus de simplicité, sans inflexions; nous aurons, au point M_2,

$$dz = ds_2 \cos \beta_2,$$

et, au point M_1,

$$dz = -ds_1 \cos \beta_1,$$

ds_1 et ds_2 étant les arcs infiniment petits $M_1 m_1$, $M_2 m_2$ considérés comme essentiellement positifs.

On a ainsi

$$\left[\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_2 - \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_1\right] dz = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_2 ds_2 \cos \beta_2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_1 ds_1 \cos \beta_1.$$

Donc l'intégrale

$$\int\left[\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_2 - \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_1\right] dz$$

peut être remplacée par la suivante

$$\int \frac{d\varphi}{dy}\, ds \cos \beta,$$

étendue au périmètre entier de la section.

Opérant de la même manière sur $\frac{d^2\varphi}{dz^2}\, dz\, dy$, et réunissant les deux résultats, on obtient

$$\int\int\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) dy\, dz = \int\left(\frac{d\varphi}{dy}\cos\beta + \frac{d\varphi}{dz}\cos\gamma\right) ds.$$

cette dernière intégrale s'étendant au périmètre entier de la section.

Mais $\frac{d\varphi}{dy}$ et $\frac{d\varphi}{dz}$ étant les composantes de la vitesse, parallèlement aux axes des y et des z, la composante suivant la normale aura pour expression

$$\frac{d\varphi}{dy}\cos\beta + \frac{d\varphi}{dz}\cos\gamma,$$

et comme cette composante est nulle, puisque, par hypothèse, le tuyau est complétement immobile, on a, pour tous les points du contour,

$$\frac{d\varphi}{dy}\cos\beta + \frac{d\varphi}{dz}\cos\gamma = 0,$$

soit que les points du fluide y soient en repos, ou en mouvement. Tous les éléments de l'intégrale étant nuls, on a

$$\int\int\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) dy\, dz = 0.$$

Cela posé, si l'on intègre tous les termes de l'équation (1), multipliés par $db\, dc$, et qu'on étende ces intégrales à l'aire entière de la section correspondante à une valeur quelconque de x, on aura

$$(3) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = a^2\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Multipliant de même par $dy\, dz$ les termes de l'équation (2), on

obtient

$$(4)\qquad \iint \gamma\, dy\, dz = -\frac{1}{a^2}\iint \frac{d\varphi}{dt}\, dy\, dz = -\frac{1}{a^2}\frac{du}{dt}.$$

Les équations (3) et (4) feront connaître les valeurs moyennes de φ et de γ. La valeur moyenne de la vitesse $\frac{d\varphi}{dx}$, parallèle à l'axe des x, sera donnée par $\frac{du}{dx}$, et l'on connaîtra ainsi la vitesse et la condensation moyenne à un instant quelconque, et pour une section quelconque.

III. L'intégrale de l'équation (3) est

$$u = \mathrm{F}(x + at) + f(x - at),$$

et il ne reste qu'à déterminer les fonctions arbitraires F et f d'après l'état initial. Supposons que l'ébranlement initial soit renfermé entre deux valeurs de x très-peu différentes, o et l, et ne s'étende pas nécessairement jusqu'aux parois du tube. Les condensations et les vitesses étant connues à cet instant, on connaît les valeurs de $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dx}$ pour $t = 0$, et, par conséquent, aussi celles de $\frac{du}{dt}$, $\frac{du}{dx}$ pour $t = 0$.

En différentiant la valeur générale de u par rapport à t et x, on obtient

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{F}'(x + at) + f'(x - at),$$

$$\frac{du}{dt} = a\,[\mathrm{F}'(x + at) - f'(x - at)].$$

Soient $\chi(x)$ et $a\chi_1(x)$ les valeurs connues de $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dt}$ pour $t = 0$, on aura

$$\mathrm{F}'(x) + f'(x) = \chi(x),$$
$$\mathrm{F}'(x) - f'(x) = \chi_1(x);$$

d'ou

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{\chi(x) + \chi_1(x)}{2},\quad f'(x) = \frac{\chi(x) - \chi_1(x)}{2},$$

et, par suite,

$$(5)\qquad \frac{du}{dx} = \frac{\chi(x + at) + \chi_1(x + at)}{2} + \frac{\chi(x - at) - \chi_1(x - at)}{2},$$

$$(6)\qquad \frac{1}{a}\frac{du}{dt} = \frac{\chi(x + at) + \chi_1(x + at)}{2} - \frac{\chi(x - at) - \chi_1(x - at)}{2}.$$

Ces équations (5) et (6) feront connaître à chaque instant la condensation moyenne et la vitesse moyenne parallèle à l'axe des x, des points qui se trouvaient primitivement dans une même section quelconque.

IV. Les fonctions $\chi(\omega)$, $\chi_1(\omega)$ sont nulles pour toutes les valeurs de ω qui ne sont pas comprises entre o et l. Si donc on considère une section correspondante à une valeur de x plus grande que l, $\chi(x+at)$ et $\chi_1(x+at)$ seront nuls, quel que soit t; et, par conséquent, pour toute section située en dehors de l'ébranlement primitif, on aura

$$\frac{du}{dx} = \frac{\chi(x-at) - \chi_1(x-at)}{2}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{a}\frac{du}{dt} = \frac{\chi_1(x-at) - \chi(x-at)}{2}, \tag{8}$$

d'où résulte

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{a}\frac{du}{dt}:$$

ce qui montre que la vitesse moyenne d'une section est le produit de la vitesse de propagation par sa condensation moyenne.

Les équations (7) et (8) montrent que $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dt}$ sont nuls tant que l'on a $x - at > l$; ils cessent de l'être quand $x - at = l$; et ils redeviennent nuls quand $x - at < 0$. Ainsi la vitesse moyenne dans le sens des x et la condensation moyenne commencent à acquérir des valeurs différentes de zéro après le temps $t = \frac{x-l}{a}$: elles reprennent la valeur zéro lorsque $t = \frac{x}{a}$, et la conservent indéfiniment, et, par conséquent, n'ont d'existence que pendant l'intervalle de temps $\frac{l}{a}$.

La propagation de la vitesse et de la condensation moyennes se fait donc avec une vitesse égale à a, c'est-à-dire avec la même vitesse que se propagerait le mouvement dans le fluide indéfini en tous sens.

On peut donc dire aussi que *le mouvement se propage dans le tube avec la même vitesse que dans le fluide indéfini.*

V. La partie primitivement ébranlée, et que nous avons supposée très-petite en tous sens, s'étend et communique le mouvement au fluide, comme s'il était indéfini, jusqu'à ce que l'onde vienne en con-

tact avec la paroi. Elle se réfléchit alors successivement et produit un mouvement rétrograde qui se réfléchira de nouveau, et ainsi de suite. Or, sans rechercher pour le moment la loi de ces réflexions, on voit que le mouvement se propagera dans les deux sens suivant la longueur du tuyau, mais ne s'anéantira pas dans les parties de cette longueur par lesquelles il aura passé.

Or il résulte de ce qui précède cette conséquence remarquable, que lorsqu'une section est atteinte par le mouvement, la vitesse moyenne et la condensation moyenne de ses points sont différentes de zéro pendant un intervalle de temps égal à $\frac{l}{a}$, et qu'ensuite elles restent constamment nulles, bien que le mouvement continue à avoir lieu dans cette même section.

Mouvement de l'air dans un tuyau cylindrique indéfini à base circulaire.

VI. Nous allons chercher maintenant, non pas seulement la vitesse avec laquelle se propage le mouvement, mais le mouvement même de chacun des points du fluide renfermé dans un tuyau cylindrique indéfini dans les deux sens. Nous supposerons que la section de ce cylindre par un plan perpendiculaire aux arêtes soit un cercle, et que l'ébranlement primitif soit semblable autour de l'axe : de sorte que le mouvement et la condensation en chaque point ne dépendent que du temps t, de l'abscisse x parallèle à l'axe du cylindre, et de la distance r à cet axe. En introduisant cette dernière variable au lieu de y et z dans l'équation aux différentielles partielles, précédemment écrite, on obtient

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2\varphi}{dx^2}\right).$$

La composante de la vitesse suivant le rayon r sera

$$\frac{y}{r}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{z}{r}\frac{d\varphi}{dz} \quad \text{ou} \quad \frac{d\varphi}{dr}:$$

$\frac{d\varphi}{dx}$ sera toujours la composante parallèle à l'axe des x, et la vitesse résultante sera

$$\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}.$$

Les molécules situées primitivement à la surface intérieure du tuyau devront y rester constamment; leur vitesse dans le sens du rayon sera donc nulle à chaque instant. Il en sera de même des points situés dans l'axe. Si donc on désigne par l le rayon de la section circulaire, on devra avoir

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \text{pour} \quad r = 0 \quad \text{et pour} \quad r = l,$$

quels que soient x et t.

L'état initial du fluide étant donné, on connaîtra les composantes de la vitesse en chaque point, ainsi que la condensation, pour la valeur zéro de t. Ce seront des fonctions arbitraires de r et x; et la question consiste à déterminer la valeur de φ qui satisfait à l'équation aux différences partielles, et aux conditions particulières que nous venons d'indiquer.

On a ainsi à satisfaire au système des équations suivantes :

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2\varphi}{dx^2}\right).$$

$$(2) \qquad \frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \text{pour} \quad r = 0 \quad \text{et pour} \quad r = l,$$

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dx} = F(x, r) & \text{pour} \quad t = 0, \\[2ex] \dfrac{d\varphi}{dr} = f(x, r) & \text{pour} \quad t = 0, \end{cases}$$

$$(4) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \psi(x, r) \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Les deux équations (3) déterminent, à une constante arbitraire près, la valeur de φ pour $t = 0$. En y joignant l'équation (4), on connaît donc les valeurs de $\varphi + c$ et de $\frac{d\varphi}{dt}$ ou $\frac{d(\varphi + c)}{dt}$, correspondantes à $t = 0$. On pourra d'ailleurs prendre pour c la valeur qu'on voudra; elle n'influera en rien sur l'état du fluide en chaque point, puisqu'il ne dépend que des dérivées de φ par rapport à r, x et t.

Posons d'abord

$$\varphi = u\theta,$$

u étant une fonction de r seulement, et θ une fonction de x et t.

L'équation (1) deviendra

$$(5)\qquad u\frac{d^2\theta}{dt^2} = a^2\left(\theta\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{\theta}{r}\frac{du}{dr} + u\frac{d^2\theta}{dx^2}\right).$$

Déterminons u par l'équation

$$(6)\qquad a^2\left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right) = -\alpha^2 u.$$

α étant une constante indéterminée. L'équation (5) deviendra

$$(7)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = a^2\frac{d^2\theta}{dx^2} - \alpha^2\theta.$$

La valeur la plus générale de u, qui satisfait à l'équation (6), est

$$u = \mathrm{M}\int_0^\pi \cos\left(\frac{\alpha r}{a}\cos\omega\right)d\omega + \mathrm{N}\int_0^\pi \cos\left(\frac{\alpha r}{a}\cos\omega\right)\log(r\sin^2\omega)\,d\omega.$$

M et N étant des constantes arbitraires. On en tire

$$\begin{aligned}\frac{du}{dr} = &-\frac{\mathrm{M}\alpha}{a}\int_0^\pi \sin\left(\frac{\alpha r}{a}\cos\omega\right)\cos\omega\,d\omega\\ &-\frac{\mathrm{N}\alpha}{a}\int_0^\pi \sin\left(\frac{\alpha r}{a}\cos\omega\right)\cos\omega\log(r\sin^2\omega)\,d\omega\\ &+\frac{\mathrm{N}}{r}\int^\pi \cos\left(\frac{\alpha r}{a}\cos\omega\right)d\omega,\end{aligned}$$

et il faut que cette expression devienne égale à zéro pour $r = 0$ et $r = l$, afin que les équations (2) soient satisfaites. Il résulte de là que la constante N ne peut être que zéro, sans quoi $\frac{du}{dr}$ serait infini pour $r = 0$. Cette supposition réduit $\frac{du}{dr}$ à son premier terme, qui devient nul pour $r = 0$. Si l'on y fait $r = l$, il faudra que l'on ait

$$\alpha\int_0^\pi \sin\left(\frac{\alpha l}{a}\cos\omega\right)\cos\omega\,d\omega = 0,$$

ou, en supprimant le facteur α, ce qui n'enlève aucune solution,

$$\int_0^\pi \sin\left(\frac{\alpha l}{a}\cos\omega\right)\cos\omega\,d\omega = 0.$$

Cette équation déterminera les valeurs de α qu'il est nécessaire de

prendre pour que les équations (2) soient satisfaites. En intégrant par parties, on lui donne la forme suivante

$$(8)\qquad \alpha \int_0^\pi \cos\left(\frac{\alpha l}{a}\cos\omega\right)\sin^2\omega\, d\omega = 0,$$

et cette équation se décompose dans les deux suivantes

$$(9)\qquad \begin{cases} \alpha = 0, \\ \displaystyle\int_0^\pi \cos\left(\frac{\alpha l}{a}\cos\omega\right)\sin^2\omega\, d\omega = 0. \end{cases}$$

Les racines de cette équation sont égales et de signes contraires, puisque le premier membre reste le même quand on change α de signe. Mais comme la valeur de u, qui se réduit, en supprimant le facteur constant, à

$$(10)\qquad u = \int_0^\pi \cos\left(\frac{\alpha r}{a}\cos\omega\right) d\omega,$$

ne change pas non plus de signe ni de valeur quand on change α de signe, les racines négatives de l'équation (9) ne donneraient pas de nouvelles valeurs de u, et l'on peut, par conséquent, se borner aux racines positives.

Supposons donc que l'on prenne une quelconque d'entre elles pour valeur de α, et intégrons l'équation (7).

Si nous faisons pour cela

$$\theta = \cos\mu(x - \xi)\cos mt,$$

il faudra que l'on ait

$$M^2 = a^2\mu^2 + \alpha^2;$$

d'où résultera

$$\theta = A\cos\mu(x - \xi)\cos t\sqrt{a^2\mu^2 + \alpha^2},$$

A, μ, ξ désignant des quantités quelconques indépendantes de x et t.

Nous aurons encore une solution de l'équation (7) en prenant

$$A = \frac{1}{2\pi}\chi(\xi)\, d\xi\, d\mu,$$

et intégrant la valeur de θ par rapport à ξ et μ entre les limites $-\infty$ et $+\infty$; car ce n'est autre chose qu'ajouter des intégrales particu-

lieres. On aura ainsi

$$(11)\quad \theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \chi(\beta)\cos\mu(x-\beta)\cos t\sqrt{a^2\mu^2+\alpha^2}\,d\beta\,d\mu,$$

et, pour $t = 0$, cette valeur de θ se réduira à la fonction arbitraire $\chi(x)$, tandis que sa dérivée par rapport à t deviendra nulle.

On aura une autre solution de l'équation (7) en intégrant l'expression (11) par rapport à t à partir de $t = 0$, et remplaçant la fonction χ par une autre fonction arbitraire χ_1; on obtient ainsi

$$(12)\quad \theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_1(\beta)}{\sqrt{a^2\mu^2+\alpha^2}}\cos\mu(x-\beta)\sin t\sqrt{a^2\mu^2+\alpha^2}\,d\beta\,d\mu.$$

Cette expression devient nulle pour $t = 0$, et sa dérivée par rapport à t devient $\chi_1(x)$ dans cette même hypothèse. Si donc on ajoute les solutions (11) et (12), on obtiendra cette autre solution

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \chi(\beta)\cos\mu(x-\beta)\cos t\sqrt{a^2\mu^2+\alpha^2}\,d\beta\,d\mu \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_1(\beta)}{\sqrt{a^2\mu^2+\alpha^2}}\cos\mu(x-\beta)\sin t\sqrt{a^2\mu^2+\alpha^2}\,d\beta\,d\mu, \end{aligned}\right.$$

et l'on trouvera, pour $t = 0$,

$$\theta = \chi(x), \quad \frac{d\theta}{dt} = \chi_1(x).$$

En faisant le produit des valeurs de u et θ données par les équations (10) et (13), on aura une valeur de φ; et si l'on ajoute toutes celles que fourniraient ainsi les différentes valeurs de α tirées de l'équation (9), on aura une valeur plus générale

$$(14)\qquad \varphi = \sum u\theta,$$

qui satisfera aux équations (1) et (2).

Il ne reste donc plus qu'à satisfaire aux équations (3) et (4), qui font connaître, comme nous l'avons déjà dit, les fonctions de x et r auxquelles se réduisent $\varphi + c$ et $\frac{d(\varphi+c)}{dt}$ pour $t = 0$; ou encore celles

de φ et $\frac{d\varphi}{dt}$ pour $t = 0$, puisqu'on peut supposer nulle cette constante indéterminée. On sait comment la valeur de φ se déduira des fonctions $F(x, r)$, $f(x, r)$ par de simples quadratures.

Supposons ce calcul effectué, et soit

$$\varphi = \Pi(x, r) \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

La valeur de φ donnée par l'équation (14) conduit, pour $t = 0$, aux deux équations

$$(15) \qquad \sum u\chi(x) = \Pi(x, r), \quad \sum u\chi_1(x) = \psi(x, r),$$

d'après lesquelles il faut déterminer les fonctions arbitraires $\chi(x)$, $\chi_1(x)$.

Considérons d'abord la première d'entre elles, et désignons par

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots, \quad \alpha_n$$

toutes les racines positives en nombre infini de l'équation (9), dont la première α_0 est zéro. La fonction θ dépendant de α, les deux fonctions $\chi(x)$, $\chi_1(x)$ en dépendront aussi, et nous représenterons par $\chi^{(n)}(x)$, $\chi_1^{(n)}(x)$ leurs valeurs correspondantes à la racine α_n. D'après cela, la première équation (15) peut être mise sous la forme suivante

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} & u_0\chi^{(0)}(x) + u_1\chi^{(1)}(x) + u_2\chi^{(2)}(x) + \ldots \\ & \qquad + u_n\chi^{(n)}(x) + \ldots = \Pi(x, r). \end{aligned} \right.$$

Or on sait que les intégrales désignées par u, qui satisfont à l'équation (6) et aux conditions (2), satisfont aussi à la suivante

$$\int_0^l u_m u_n r\,dr = 0,$$

toutes les fois que les indices m, n sont différents.

Si donc on multiplie les deux membres de l'équation (16) par $u_n r\,dr$ et qu'on les intègre entre 0 et l, on obtiendra

$$\chi^{(n)}(x) \int_0^l r u_n^2\,dr = \int_0^l \Pi(x, r) u_n r\,dr,$$

d'où l'on tire

$$\chi^{(n)}(x) = \frac{\int_0^l \Pi(x, r) u_n r dr}{\int_0^l u_n^2 r dr}.$$

et l'on trouvera de même

$$\chi_1^{(n)}(x) = \frac{\int_0^l \psi(x, r) u_n r dr}{\int_0^l u_n^2 r dr}.$$

La valeur de φ qui satisfera à toutes les conditions de la question sera donc

$$(17)\quad \varphi = \frac{1}{2\pi}\left\{\begin{array}{l} \sum u_n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\beta\, d\mu \cos\mu(x-\beta) \cos t\sqrt{a^2\mu^2+\alpha_n^2}\, \dfrac{\int_0^l \Pi(\beta, r) u_n r dr}{\int_0^l u_n^2 r dr} \\ + \sum u_n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{d\beta\, d\mu \cos\mu(x-\beta)}{\sqrt{a^2\mu^2+\alpha_n^2}} \sin t\sqrt{a^2\mu^2+\alpha_n^2}\, \dfrac{\int_0^l \psi(\beta, r) u_n r dr}{\int_0^l u_n^2 r dr} \end{array}\right\}.$$

VII. On peut, au moyen de cette valeur de φ, vérifier le résultat obtenu dans le n° IV. En effet, l'équation

$$\int_0^l u_m u_n r dr = 0$$

prouve que l'on a

$$\int_0^l u_n r dr = 0,$$

excepte pour $n = 0$. Si donc on multiplie les deux membres de l'équation (17) par $2\pi r dr$ et qu'on les intègre entre les limites 0 et l, il suffira de considérer, dans le second membre, les deux termes correspondants à $n = 0$. Si l'on remplace u_0 par sa valeur π, on obtiendra

ainsi, en observant que $\alpha_0 = 0$,

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \int_0^l 2\pi r\varphi\, dr = &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\mu \cos\mu(x-\xi)\cos\mu at \int_0^l \Pi(\xi, r)\, r\, dr \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi\, d\mu \cos\mu(x-\xi)}{\mu a} \sin\mu at \int_0^l \psi(\xi, r)\, r\, dr. \end{aligned}\right.$$

Posons

$$\int_0^l \Pi(\xi, r)\, r\, dr = \varphi_1(\xi),$$

et remplaçons

$$\cos\mu(x-\xi)\cos\mu at$$

par

$$\frac{\cos\mu(x+at-\xi) + \cos\mu(x-at-\xi)}{2},$$

la première partie du second membre de l'équation (18) deviendra

$$\pi[\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)].$$

Quant à la seconde partie, elle peut être mise sous la forme

$$\int_0^t dt \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\mu \cos\mu(x-\xi)\cos\mu at \int_0^l \psi(\xi, r)\, r\, dr,$$

et, si nous posons

$$\int_0^l \psi(\xi, r)\, r\, dr = \varphi_2(\xi),$$

elle devient

$$\pi\int_0^t [\varphi_2(x+at) + \varphi_2(x-at)]\, dt,$$

et peut se mettre sous la forme

$$\pi\left[\frac{\psi_1(x+at) - \psi_1(x-at)}{a}\right],$$

en posant

$$\int \varphi_2(\xi)\, a\xi = \psi_1(\xi).$$

D'après cela, l'équation (18) devient

$$(19)\quad \int_0^l r\varphi\, dr = \frac{\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)}{2} + \frac{\psi_1(x+at) - \psi_1(x-at)}{2a}.$$

si l'on différentie les deux membres de cette équation par rapport à x et à t, et que l'on observe que l'on a

$$\varphi'_1(\beta) = \int_0^l F(\beta, r)\, r dr, \quad \psi'_1(\beta) = \varphi_2(\beta) = \int_0^l \psi(\beta, r)\, r dr,$$

on obtiendra

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^l \frac{d\varphi}{dx}\, r dr &= \frac{1}{2}\int_0^l [F(x+at, r) + F(x-at, r)]\, r dr \\ &+ \frac{1}{2a}\int_0^l [\psi(x+at, r) - \psi(x-at, r)]\, r dr. \end{aligned} \right.$$

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^l \frac{d\varphi}{dt}\, r dr &= \frac{a}{2}\int_0^l [F(x+at, r) - F(x-at, r)]\, r dr \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^l [\psi(x+at, r) + \psi(x-at, r)]\, r dr. \end{aligned} \right.$$

En faisant $t = 0$ dans ces équations, on trouve, comme cela devait être,

$$\int_0^l \frac{d\varphi}{dx}\, r dr = \int_0^l F(x, r)\, r dr, \quad \int_0^l \frac{d\varphi}{dt}\, r dr = \int_0^l \psi(x, r)\, r dr.$$

Comparons maintenant les équations (20), (21) aux équations (5) et (6) du n° III, en observant que l'on devra poser

$$u = 2\pi\int_0^l \varphi . r dr, \quad \frac{du}{dx} = 2\pi\int_0^l \frac{d\varphi}{dx}\, r dr, \quad \frac{du}{dt} = 2\pi\int_0^l \frac{d\varphi}{dt}\, r dr,$$

et, par conséquent,

$$\chi(x) = 2\pi\int_0^l F(x, r)\, r dr, \quad a\chi_1(x) = 2\pi\int_0^l \psi(x, r)\, r dr.$$

D'où l'on voit que les équations (5) et (6) coïncident avec les équations (20), (21); *ce que nous voulions vérifier.*

Cas où le mouvement n'a lieu que dans la direction du rayon.

VIII. Supposons que, dans l'état initial, les points ne soient pas sortis de la section dans laquelle ils se trouvaient dans l'état naturel d'équilibre, et que cet état initial soit le même pour tous les points

également distants de l'axe. La fonction φ ne dépendra alors que de r et t, et, par conséquent, on aura

$$F(x, r) = 0.$$

Les fonctions connues $f(x, r)$, $\psi(x, r)$ seront remplacées par $f(r)$ que nous désignerons par $\frac{d\Pi(r)}{dr}$, et par $\psi(r)$; et la fonction $\Pi(x, r)$ sera remplacée par $\Pi(r)$. Les équations du probleme seront donc

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right),$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \text{pour } r = 0 \quad \text{et} \quad r = l,$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \Pi(r) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \psi(r) \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

On peut traiter directement ces equations comme celles du n° VI, et poser d'abord

$$\varphi = u\theta,$$

$$u = \int_0^l \cos\left(\frac{\alpha r}{a}\cos\omega\right) d\omega, \quad \alpha\int_0^l \cos\left(\frac{\alpha l}{a}\cos\omega\right)\sin^2\omega\, d\omega = 0,$$

nous verrons tout à l'heure qu'on peut négliger la racine $\alpha = 0$. Il resulte de ces équations

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\alpha^2\theta, \quad \theta = A\cos\alpha t + B\sin\alpha t,$$

$$\varphi = \sum A_n u_n \cos\alpha_n t + \sum B_n u_n \sin\alpha_n t$$

A_n et B_n seront determines par les conditions

$$\sum A_n u_n = \Pi(r), \quad \sum \alpha_n B_n u_n = \psi(r),$$

d'ou

$$A_n = \frac{\int_0^l u_n r\Pi(r)\,dr}{\int_0^l u_n^2 r\,dr}, \quad B_n = \frac{\int_0^l u_n r\psi(r)\,dr}{\alpha_n\int_0^l u_n^2 r\,dr},$$

et, par conséquent,

$$(22)\qquad \varphi = \sum u_n \left\{ \cos \alpha_n t \cdot \frac{\int_0^l \Pi(r) u_n r\,dr}{\int_0^l u_n^2 r\,dr} + \frac{\sin \alpha_n t}{\alpha_n} \cdot \frac{\int_0^l \psi(r) u_n r\,dr}{\int_0^l u_n^2 r\,dr} \right\}.$$

Quoique cette formule ait été très-facile à trouver directement, il n'est pas inutile de reconnaître comment elle peut être déduite de la formule (17), en supposant qu'on y remplace les fonctions $\Pi(\xi, r)$, $\psi(\xi, r)$ par $\Pi(r)$, $\psi(r)$. Pour cela, nous considérerons d'abord l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\mu \cos \mu (x - \xi) \cos t \sqrt{a^2 \mu^2 + \alpha_n^2};$$

intégrant par rapport à ξ, entre x et une limite positive très-grande, il faudra calculer ensuite

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mu \frac{\sin \mu (\xi - x)}{\mu} \cos t \sqrt{a^2 \mu^2 + \alpha_n^2},$$

puis, supposer $\xi = \infty$.

Il est facile de voir que lorsque ξ est très-grand, il suffit de considérer les valeurs de μ très-voisines de zéro; ce qui réduit $\cos t \sqrt{a^2 \mu^2 + \alpha_n^2}$ sensiblement à $\cos \alpha_n t$. Quant à l'intégrale

$$\int \frac{\sin \mu (\xi - x)}{\mu} d\mu,$$

qui devait être prise entre des limites très-voisines de zéro, il n'y a aucun inconvénient à la prendre entre $-\infty$ et $+\infty$, ce qui donne π pour sa valeur. La partie de l'intégrale double qui vient d'être calculée est donc égale à $\pi \cos \alpha_n t$.

On verrait de même que la partie correspondante aux valeurs de ξ comprises entre $-\infty$ et x, est encore égale à $\pi \cos \alpha_n t$. D'où il suit que l'on doit remplacer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\mu \cos \mu (x - \xi) \cos t \sqrt{a^2 \mu^2 + \alpha_n^2}$$

par $2\pi \cos \alpha_n t$.

Un calcul semblable donnera

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\beta\, d\mu \cos\mu(x-\beta)}{\sqrt{a^2\mu^2+\alpha_n^2}}\sin t\sqrt{a^2\mu^2+\alpha_n^2}=\frac{2\pi\sin\alpha_n t}{\alpha_n}.$$

La formule (17) devient donc

$$\varphi=\sum u_n\cos\alpha_n t\frac{\int_0^l \Pi(r)\,u_n\,r\,dr}{\int_0^l u_n^2\,r\,dr}+\sum\frac{u_n\sin\alpha_n t}{\alpha_n}\frac{\int_0^l \psi(r)\,u_n\,r\,dr}{\int_0^l u_n^2\,r\,dr},$$

ce qui coïncide avec la formule (22).

Il est bon d'observer que, dans l'équation (22), il est inutile de tenir compte de la racine $\alpha_0=0$; car la première partie du second membre donnerait un terme constant, qui disparaîtra dans $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{dr}$; et la seconde partie donnera un terme nul, vu que

$$\int_0^l \psi(r)\,r\,dr=0,$$

puisque la masse du fluide n'a pas varié.

IX. Considérons dans la valeur de φ les termes correspondants à une même valeur de α; ils seront de la forme

$$u_n(\mathrm{A}\cos\alpha_n t+\mathrm{B}\sin\alpha_n t).$$

En supposant φ réduit à ces seuls termes, on aurait

$$\frac{d\varphi}{dr}=\frac{du_n}{dr}(\mathrm{A}\cos\alpha_n t+\mathrm{B}\sin\alpha_n t),$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\alpha_n u_n(-\mathrm{A}\sin\alpha_n t+\mathrm{B}\cos\alpha_n t),$$

d'où l'on conclut que, dans ce mouvement partiel, les vitesses et les condensations en chaque point redeviendraient les mêmes après un intervalle de temps T, ayant pour expression

$$\mathrm{T}=\frac{2\pi}{\alpha_n}.$$

Ainsi *les nombres de vibrations exécutées pendant un même temps,*

dans les divers mouvements élémentaires qui peuvent avoir lieu dans le même tuyau, sont directement proportionnels aux racines correspondantes de l'équation (9).

Pour déterminer les surfaces nodales correspondantes à une racine quelconque α_n, il faut poser

$$\frac{du_n}{dr} = 0,$$

ou

$$r\int_0^\pi \cos\left(\frac{\alpha_n r}{a}\cos\omega\right)\sin^2\omega\, d\omega = 0,$$

ce qui donne, dans tous les cas, $r = 0$; et, en effet, tous les points de l'axe restent nécessairement immobiles. Les autres valeurs de r se déduisent immédiatement de la comparaison de cette équation avec l'équation (9), et l'on obtient

$$\alpha_n r = \alpha l, \quad r = \frac{\alpha}{\alpha_n} l.$$

Dans cette équation, on donnera à α toutes les valeurs tirées de l'équation (9); et les valeurs de r qui seront moindres que l détermineront des surfaces cylindriques ayant même axe que le tuyau, et dont tous les points seront sans vitesse : ce seront les surfaces nodales correspondantes à ce mouvement particulier. La condensation n'y sera pas nulle, parce que u_n n'étant pas zéro, $\frac{d\varphi}{dt}$ ne le sera pas non plus généralement.

Les différents rayons des surfaces nodales seront donc, en ne considérant pas l'axe ni la surface du tuyau,

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_n} l, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_n} l, \ldots, \quad \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} l;$$

leur nombre est le même que celui des racines moindres que celle que l'on considère.

Les numérateurs α_1, α_2, etc., étant les mêmes pour deux racines quelconques α_n, α_m, les rayons des surfaces nodales du même rang, dans deux mouvements simples différents, sont en raison inverse des deux racines correspondantes à ces mouvements. *Les intervalles entre*

ces surfaces sont donc dans des rapports invariables, quel que soit ce mouvement

M. Poisson a eu occasion de considérer une équation semblable à l'équation (9), dans le mouvement vibratoire d'une membrane circulaire, qui offre beaucoup d'analogie avec celui que nous examinons ici. Il ramene sa résolution à celle de l'équation suivante dont les racines sont entierement numériques, et ne dépendent d'aucune des données particulières de la question,

$$\int_0^l \cos(2\sqrt{x}\cos\omega)\sin^2\omega\, d\omega = 0.$$

Les deux plus petites racines de cette derniere équation, calculées par cet illustre géomètre, sont

$$x_1 = 3{,}55, \quad x_2 = 12{,}41;$$

d'ou nous concluons

$$\alpha_1 = \frac{2a\sqrt{3{,}55}}{l}, \quad \alpha_2 = \frac{2a\sqrt{12{,}41}}{l},$$

et généralement

$$\alpha_n = \frac{2a\sqrt{x_n}}{l}.$$

Le temps T, pendant lequel s'opère une vibration, devient

$$T = \frac{\pi l}{a\sqrt{x_n}}.$$

La quantité a, qui est la vitesse de propagation du son dans le gaz, sera égale à 333, si ce gaz n'est autre chose que l'air atmosphérique à la température 0°, en prenant le mètre pour unité: la formule précédente devient alors

$$T = \frac{\pi l}{333\sqrt{x_n}}.$$

Dans la valeur de T, il n'y a que le facteur l qui dépende du tuyau, puisque x_n est racine d'une équation qui n'en dépend pas, d'où l'on conclut que *dans des tuyaux de largeurs différentes, le ton correspondant au même nombre de surfaces nodales est en raison inverse du diamètre du tuyau.*

L'expression $\frac{\alpha}{\alpha_n} l$ des rayons des surfaces nodales relatives au mouvement simple correspondant à la racine α_n, devient, en introduisant les racines de l'équation en x,

$$r = l\sqrt{\frac{x}{x_n}}.$$

Ces valeurs sont proportionnelles à l, et, par conséquent, *les surfaces nodales forment des systèmes semblables dans des tuyaux différents*.

On peut remarquer que les valeurs de α n'étant pas en progression arithmétique, les parties qui sont comprises entre deux surfaces nodales consécutives, et qui effectuent dans le même temps leurs vibrations dans le sens du rayon, n'ont pas la même épaisseur.

X. Pour que l'air renfermé dans le tuyau rende un son unique, il faut qu'il n'existe qu'un seul de ces mouvements simples. Le plus grave que l'on puisse obtenir correspond à α_1; il n'y a alors aucune surface nodale entre l'axe et la paroi du tuyau; la durée de l'oscillation totale est

$$T = \frac{2\pi l}{1254,84}.$$

Ainsi, pour un tuyau de 1 mètre de diamètre, le son le plus grave correspondrait à un nombre de vibrations égal à

$$\frac{1254,84}{\pi} = 399,42.$$

Le plus grave après celui-ci correspond à α_2; la durée de l'oscillation est

$$T = \frac{2\pi l}{2346,17}$$

Le nombre d'oscillations exécutées dans une seconde est donc

$$\frac{2346,17}{2\pi l};$$

et, dans le cas où le diamètre $2l$ est 1 mètre, ce nombre est

$$746,8.$$

Ce ton n'est pas tout à fait l'octave du premier. Le rayon de la surface nodale qui lui correspond, et qui peut être regardée comme une paroi résistante, est aussi un peu plus grand que la moitié de celui qui répond au premier ton. Car il est $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} l$ ou $\frac{1254,84}{2346,17} l$, qui est un peu plus grand que $\frac{1}{2} l$.

En déterminant les diverses racines α_3, α_4, etc., on connaîtrait tous les sons uniques, correspondants aux différents mouvements simples dont le tuyau est susceptible.

Comparaison avec le mouvement longitudinal dans un tube fermé aux deux bouts.

XI. Les réflexions du mouvement, aux parties opposées du tuyau, conduisent à comparer le ton résultant à celui que produisent les réflexions aux deux extrémités d'un tuyau fermé des deux côtés; en admettant, comme on le fait ordinairement, que les molécules du fluide n'aient de mouvement que parallèlement à l'axe du tuyau, et que tous les points compris dans une même section, dans l'état d'équilibre, y restent constamment.

Les équations du mouvement sont, dans ce cas, en désignant par L la longueur du tuyau, et prenant une des extrémités pour origine des x,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2}.$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et pour} \quad x = \mathrm{L}.$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \mathrm{F}(x) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= f(x) \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

On satisfera à la première équation et aux conditions des extrémités, en prenant

$$\varphi = \sum \cos\frac{n\pi x}{\mathrm{L}} \left(\mathrm{A} \cos\frac{n\pi a t}{\mathrm{L}} + \mathrm{B} \sin\frac{n\pi a t}{\mathrm{L}} \right).$$

la somme se rapportant à toutes les valeurs entières de n depuis 0 jus-

qu'à l'infini. Les coefficients A, B se déterminent, comme on le sait, au moyen des fonctions $F(x)$, $f(x)$; mais nous n'avons pas besoin de connaître leur forme, et nous nous bornerons à l'expression précédente de φ. On en tire

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\pi}{L}\sum n \sin\frac{n\pi x}{L}\left(A\cos\frac{n\pi at}{L} + B\sin\frac{n\pi at}{L}\right),$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi a}{L}\sum n \cos\frac{n\pi x}{L}\left(-A\sin\frac{n\pi at}{L} + B\cos\frac{n\pi at}{L}\right).$$

Si l'on considère le mouvement simple correspondant à une seule valeur de n, on voit que la durée de sa période est, pour tous les points,

$$T = \frac{2L}{na},$$

et que les valeurs de x pour lesquelles la vitesse est constamment nulle, sont données par l'équation

$$\sin\frac{n\pi x}{L} = 0,$$

d'où

$$x = \frac{iL}{n}.$$

i désignant un nombre entier. Les surfaces nodales sont donc les sections perpendiculaires à l'axe, aux points qui le partagent en n parties égales.

Si $n = 1$, on a le son le plus grave; le nombre de vibrations effectuées dans une seconde est $\frac{a}{2L}$; et l'on voit qu'en multipliant ce nombre par le double de la longueur du tuyau, on aurait la vitesse a de propagation du son. Dans ce cas de $n = 1$, il n'y a pas de surface nodale entre les extrémités.

Si l'on prend $n = 2$, il y aura une surface nodale au milieu; et c'est ce mouvement qu'il est le plus naturel de comparer au mouvement suivant les rayons du cylindre, dans lequel il y a de même un nœud au milieu de l'intervalle compris entre les deux parties où ont lieu les réflexions. On a alors

$$T = \frac{L}{a}.$$

Supposons que la distance L des deux faces réfléchissantes soit égale à la distance correspondante $2l$ dans le mouvement suivant les rayons; la valeur de T devient

$$T = \frac{2l}{a},$$

et celle que nous avons trouvée pour l'autre cas est

$$T = \frac{2\pi l}{1254,84}.$$

Le second son du tuyau fermé et le premier du tuyau indéfini correspondent donc à des nombres de vibrations qui sont à très peu près dans le rapport de $a : \frac{1254,84}{\pi}$ ou de $1 : 1,2$, ou encore de $5 : 6$.

Mouvement de l'air dans un tuyau cylindrique d'une longueur finie.

XII. Notre objet principal étant d'apprécier l'influence des mouvements perpendiculaires à l'axe, sur le son produit, nous admettrons, comme on le fait ordinairement, que la condensation du fluide est nulle aux parties qui sont en communication avec l'air environnant. M. Poisson, au moyen d'une hypothèse particulière, a eu égard aux petits changements de densité qui peuvent avoir lieu en ces points, et a expliqué ainsi les petites différences que présentaient le calcul et l'expérience. Mais ces considérations nous écarteraient de notre objet présent, et nous remettrons à un autre temps cette discussion plus approfondie.

Soit l le rayon de la section perpendiculaire aux arêtes, et b la longueur du tuyau. Nous prendrons l'une des extrémités de l'axe pour origine des abscisses. L'état initial étant donné, on connaît les valeurs de

$$\frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{d\varphi}{dr} \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Ainsi, on connaît les valeurs de φ et $\frac{d\varphi}{dt}$ pour $t = 0$, la valeur de φ pouvant être augmentée d'une constante arbitraire, qui n'influera en rien sur les diverses circonstances du mouvement, qui ne dépendent que des dérivées de φ.

On aura donc à satisfaire aux équations suivantes

$$(a) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2\varphi}{dx^2}\right),$$

$$(b) \qquad \frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \text{pour} \quad r = 0 \quad \text{et} \quad r = l,$$

$$(c) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = b.$$

$$\left.\begin{aligned} (d) \qquad \varphi &= \Pi(x, r) \\ (e) \qquad \frac{d\varphi}{dt} &= \psi(x, r) \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

les fonctions Π et ψ n'étant données qu'entre les limites

$$x = 0, \quad x = b, \quad \text{et} \quad r = 0, \quad r = l.$$

Nous poserons, comme dans le cas du tuyau indéfini,

$$\varphi = u\mathcal{S}, \quad u = \int_0^\pi \cos\left(\frac{\alpha r}{a}\cos\omega\right) d\omega,$$

$$(f) \qquad \alpha\int_0^\pi \cos\left(\frac{\alpha l}{a}\cos\omega\right)\sin^2\omega\, d\omega = 0,$$

et l'on satisfera ainsi aux équations (a) et (b), quelque racine de l'équation (f) que l'on considère.

L'équation qui détermine la fonction de x et t désignée par $\mathcal{S}$, est

$$(g) \qquad \frac{d^2\mathcal{S}}{dt^2} = a^2\frac{d^2\mathcal{S}}{dx^2} - \alpha^2\mathcal{S},$$

et l'on doit avoir

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = b.$$

On aura une intégrale particulière de l'équation (g) en posant

$$\mathcal{S} = (\mathrm{A}\sin\mu x + \mathrm{B}\cos\mu x)\left(\mathrm{M}\cos t\sqrt{a^2\mu^2 + \alpha^2} + \mathrm{N}\sin t\sqrt{a^2\mu^2 + \alpha^2}\right).$$

Pour que l'on ait $\frac{d\mathcal{S}}{dt} = 0$ pour $x = 0$ quel que soit t, il faut faire $\mathrm{B} = 0$, et pour que la même condition ait lieu pour $x = b$, il faut faire $\mu = \frac{n\pi}{b}$, n étant un nombre entier quelconque qu'il suffira de prendre positif.

En faisant la somme des valeurs particulières de θ relatives à toutes les valeurs de n depuis $n = 1$ jusqu'à $n = \infty$, on aura l'expression plus générale

$$\theta = \sum \sin n\pi \frac{x}{b} \left(\mathrm{M} \cos . t \sqrt{\frac{n^2 a^2 \pi^2}{b^2} + \alpha^2} + \mathrm{N} \sin . t \sqrt{\frac{n^2 a^2 \pi^2}{b^2} + \alpha^2} \right),$$

les coefficients M et N pouvant varier arbitrairement pour les différentes valeurs de n et pour une même valeur de α.

En considérant une racine particulière quelconque α_m de l'équation (f), on aura la valeur particulière suivante pour φ,

$$\varphi = u_m \sum \sin n\pi \frac{x}{b} \left(\mathrm{M} \cos . t \sqrt{\frac{n^2 a^2 \pi^2}{b^2} + \alpha_m^2} + \mathrm{N} \sin . t \sqrt{\frac{n^2 a^2 \pi^2}{b^2} + \alpha_m^2} \right).$$

et faisant la somme des expressions de ce genre, relatives à toutes les racines α de l'équation (f), on aura une valeur plus générale de φ, qui pourra satisfaire à toutes les conditions de la question, en déterminant convenablement M et N en fonction des quantités n et α_m.

Cette valeur de φ sera exprimée comme il suit :

$$(h) \qquad \varphi = \sum_{m=0}^{m=\infty} u_m \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin \frac{n\pi x}{b} \left(\mathrm{M} \cos . t \sqrt{\frac{n^2 a^2 \pi^2}{b^2} + \alpha_m^2} + \mathrm{N} \sin . t \sqrt{\frac{n^2 a^2 \pi^2}{b^2} + \alpha_m^2} \right).$$

Et il suffit, pour qu'elle résolve la question, qu'elle donne

$$\varphi = \Pi(x, r) \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \psi(x, r) \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Les coefficients M et N doivent donc être déterminés par les équations suivantes :

$$(k) \qquad \sum u_m \sum \mathrm{M} \sin \frac{n\pi x}{b} = \Pi(x, r).$$

$$(l) \qquad \sum u_m \sum \mathrm{N} \sqrt{\frac{n^2 a^2 \pi^2}{b^2} + \alpha_m^2} . \sin \frac{n\pi x}{b} = \psi(x, r).$$

Pour satisfaire à l'équation (k), observons que chaque valeur de u_m est multipliée par une série qui renferme x et la même racine α_m de l'équation (f). Le premier membre de l'équation (k) pourrait donc se

mettre sous la forme

$$\sum u_m F_m(x, \alpha_m) = \Pi(x, r),$$

et en ne considérant que la variable r, on tirera de la

$$F_m(x, \alpha_m) = \frac{\int_0^l \Pi(x, \gamma) u_m \gamma \, d\gamma}{\int_0^l \gamma u_m^2 \, d\gamma},$$

et, d'après la signification de la fonction $F_m(x, \alpha_m)$, on devra avoir

$$F_m(x, \alpha_m) = \sum M \sin \frac{n\pi x}{b},$$

d'où

$$M = \frac{2}{b} \int_0^b F_m(\xi, \alpha_m) \sin \frac{n\pi\xi}{b} \, d\xi,$$

ou

$$(m) \qquad M = \frac{2}{b} \int_0^b \sin \frac{n\pi\xi}{b} \, d\xi \, \frac{\int_0^l \Pi(\xi, \gamma) u_m \gamma \, d\gamma}{\int_0^l \gamma u_m^2 \, d\gamma}.$$

On déduira de même de l'équation (l),

$$(n) \qquad N = \frac{2}{b\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \alpha_m^2}} \int_0^b \sin \frac{n\pi\xi}{b} \, d\xi \, \frac{\int_0^l \psi(\xi, \gamma) u_m \gamma \, d\gamma}{\int_0^l \gamma u_m^2 \, d\gamma}.$$

Les valeurs de M et N données par les formules (m), (n) sont les fonctions cherchées de n et α_m, qui, substituées dans l'équation (h), donnent la solution complète de la question.

XIII. Si l'on considère d'abord la partie de φ qui correspond à la seule racine $\alpha_0 = 0$, on aura, en la désignant par φ_0,

$$(p) \quad \varphi_0 = \sum \sin \frac{n\pi x}{b} \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{bl^2} \cos \frac{na\pi t}{b} \int_0^b \sin \frac{n\pi\xi}{b} \, d\xi \int_0^l \Pi(\xi, \gamma) \gamma \, d\gamma \\ + \frac{4}{na\pi l} \sin \frac{na\pi t}{b} \int_0^b \sin \frac{n\pi\xi}{b} \, d\xi \int_0^l \psi(\xi, \gamma) \gamma \, d\gamma \end{array} \right\}.$$

Cette valeur est celle que l'on trouverait pour φ, si l'état initial était indépendant de r, et que les fonctions $\Pi(x, r)$, $\psi(x, r)$ fussent remplacées par

$$\frac{2}{l^2}\int_0^l \Pi(x, \eta)\eta\, d\eta, \quad \frac{2}{l^2}\int_0^l \psi(x, \eta)\eta\, d\eta,$$

qui se réduisent à $\Pi(x)$, $\psi(x)$ lorsque les fonctions Π, ψ ne renferment pas r.

Le son simple le plus grave, fourni par la formule (p), correspond à $n = 1$, et les vibrations ont pour durée

$$T = \frac{2b}{a}:$$

il y a une seule surface nodale qui est la section également distante des bases.

Tous les autres sons simples fournis par la même formule sont les harmoniques du premier, et la position des surfaces nodales correspondantes est connue depuis longtemps.

Examinons maintenant l'expression de φ_1, c'est-à-dire de la partie de φ qui provient de la racine α_1.

Si nous désignons par M_1, N_1 les valeurs de M, N que fournissent les équations (m), (n) quand on considère la racine

$$\alpha_1 = \frac{2a\sqrt{3,55}}{l},$$

et la seule valeur $n = 1$, nous aurons, en désignant par φ_1 cette partie de φ_1,

$$\varphi_1 = \int_0^\pi \cos\left(\frac{\alpha_1 r}{a}\cos\omega\right) d\omega \,.\, \sin\frac{\pi x}{b}\left(M_1 \cos.\, t\sqrt{\frac{a^2\pi^2}{b^2} + \alpha_1^2} + N_1 \sin.\, t\sqrt{\frac{a^2\pi^2}{b^2} + \alpha_1^2}\right).$$

L'état initial qui correspond à cette valeur de φ est celui qui donnera le son le plus grave que puisse rendre le tuyau, lorsque les points du fluide ont un mouvement dans le sens des rayons.

Tous les points situés dans l'axe n'ont de mouvement que dans le sens de cet axe, et sont les seuls dans ce cas.

Tous les points situés dans la section également distante des deux bases n'ont, au contraire, aucun mouvement dans le sens de l'axe;

mais ils en ont dans le sens des rayons, excepté toutefois ceux qui sont situés à la circonférence ou au centre.

L'intervalle de temps après lequel a lieu le retour de tous les points à leur première position, ou la durée de la vibration, est

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{a^2\pi^2}{b^2} + \alpha_1^2}} = \frac{2b}{a\sqrt{1 + \frac{14,2.b^2}{\pi^2 l^2}}},$$

au lieu de $\frac{2b}{a}$ que nous avons trouvé dans le même cas, lorsqu'il n'y a aucun mouvement dans le sens des rayons. Ce mouvement produit un son plus aigu, dans le rapport de

$$\sqrt{1 + \frac{14,2.b^2}{\pi^2 l^2}} : 1,$$

qui est d'autant plus grand que le tuyau est plus étroit par rapport à sa longueur. Ce rapport peut même être regardé comme proportionnel à $\frac{b}{l}$, dès que la longueur b est égale à plusieurs fois la largeur $2l$.

Pour donner une idée de l'influence des mouvements perpendiculaires à l'axe, considérons un tuyau dont la longueur soit égale à dix fois la largeur; il faudra faire alors $\frac{b}{l} = 20$, et le rapport précédent devient à très-peu près

$$24 : 1,$$

ce qui correspond à la quadruple octave de la quinte au-dessus du ton que l'on obtiendrait s'il n'y avait pas de mouvement dans le sens des rayons, et dont l'expérience s'éloigne très-peu.

Il me semble donc que l'on est en droit de conclure de là que, dans les sons rendus par les tuyaux cylindriques, les molécules du fluide doivent être regardées comme n'ayant que des mouvements parallèles à l'axe; du moins lorsque l'ébranlement qui le produit est le même pour tous les points également distants de l'axe.

Les légères différences que présente l'expérience et la théorie fondée sur l'hypothèse des mouvements parallèles à l'axe, ne peuvent tenir à l'inexactitude de cette hypothèse; puisqu'en introduisant les mouvements perpendiculaires on obtient un son extrêmement éloigné de

ceux que fournit l'expérience, et que, par conséquent, ces derniers mouvements ne sont pour rien dans l'effet observé. Ce n'est pas à dire qu'on ne pourrait réellement les produire; mais je ne connais sur ce point aucune expérience qui puisse servir à vérifier les indications du calcul. La formule précédente montre qu'ils seront d'autant plus aigus, et, par conséquent, d'autant plus difficiles à produire, que le tuyau sera plus étroit par rapport à sa longueur.

Quant aux causes qui peuvent produire la différence qui a lieu entre la théorie et le calcul, on en a indiqué plusieurs qu'il n'entre pas dans mon objet de discuter en ce moment.

On arriverait à des conséquences analogues en considérant un tuyau prismatique. Nous allons en indiquer rapidement le calcul, en supposant que la base soit un rectangle quelconque.

Mouvement de l'air dans un tuyau fini à base rectangulaire.

XIV. Désignons par $2m$, $2n$ les côtés de la base, et par l la longueur du tuyau, qui est ouvert aux deux bouts. On devra avoir les conditions suivantes, en supposant que l'axe des x soit l'axe du tuyau, l'origine à une de ses extrémités, et les axes des y et des z parallèles aux deux côtés de la base,

$$\frac{d\varphi}{dy} = 0 \quad \text{pour} \quad y = \pm m,$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = 0 \quad \text{pour} \quad z = \pm n,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = l.$$

On satisfait à l'équation aux différentielles partielles et à ces conditions particulières au moyen de la valeur suivante

$$\varphi = \sum \sin\frac{p\pi x}{l}\cos\frac{q\pi y}{m}\cos\frac{r\pi z}{n}\left(\mathrm{M}\sin\pi at\sqrt{\frac{p^2}{l^2}+\frac{q^2}{m^2}+\frac{r^2}{n^2}} + \mathrm{N}\cos\pi at\sqrt{\frac{p^2}{l^2}+\frac{q^2}{m^2}+\frac{r^2}{n^2}}\right),$$

cette somme s'étendant à toutes les valeurs entières et positives de p, q, r; et les coefficients M et N étant des fonctions de ces quantités, qu'on déterminera sans difficulté d'après l'état initial.

Pour un même système de valeurs de p, q, r, on aura un mouvement simple correspondant à un état initial particulier, et la durée de

la vibration aura pour expression

$$T = \frac{2}{a\sqrt{\frac{p^2}{l^2} + \frac{q^2}{m^2} + \frac{r^2}{n^2}}}.$$

Si l'on prend $q = 0$, $r = 0$, le mouvement est le même pour tous les points d'une même section, et on retombe sur la formule ordinaire

$$T = \frac{2l}{pa}.$$

Les vibrations sont plus rapides s'il y a des mouvements perpendiculaires à l'axe; parce que q et r étant différents de zéro, le dénominateur de T est plus grand, et T plus petit. On voit même qu'elles sont d'autant plus rapides, toutes choses égales d'ailleurs, que les dimensions de la base sont plus petites.

Le son le plus grave que le tuyau puisse rendre lorsque les composantes de la vitesse parallèlement aux arêtes de la base ne sont pas nulles, correspond à $p = 1$, $q = 1$, $r = 1$, et la durée de la vibration est alors

$$T = \frac{2}{a\sqrt{\frac{1}{l^2} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}}}.$$

Si les mouvements étaient tous parallèles à l'axe, on aurait pour le son le plus grave

$$T = \frac{2l}{a}.$$

Les nombres de vibrations correspondants à ces deux sons sont dans le rapport de

$$\sqrt{1 + \frac{l^2}{m^2} + \frac{l^2}{n^2}} : 1.$$

Si les cotés $2m$, $2n$ de la base sont suffisamment petits par rapport à la longueur du tuyau, on peut supprimer l'unité sous le radical; il y aurait à peine quelques millièmes d'erreur, si la longueur était seulement égale à cinq fois la largeur. En faisant cette simplification, le rapport des nombres de vibrations devient

$$\sqrt{\frac{l^2}{m^2} + \frac{l^2}{n^2}} : 1,$$

ou

$$\frac{l\sqrt{m^2+n^2}}{mn} : 1.$$

Ce rapport est donc proportionnel à la longueur du tuyau, à la diagonale de sa base, et en raison inverse de la surface de cette base.

XV. Supposons, par exemple, un tuyau à base carrée, et dont la longueur soit égale à dix fois la largeur; le rapport en question deviendra

$$28,28 : 1,$$

et le premier son serait presque la cinquième octave au-dessus du second, qui est sensiblement celui que donne l'expérience.

D'où l'on peut encore conclure que ce ne sont pas les mouvements parallèles aux côtés de la base qui produisent les petites différences qui ont lieu entre l'observation et le calcul.

Dans ce tuyau cylindrique dont la longueur est égale à dix fois la largeur, comme dans cet exemple, nous avons trouvé, entre les deux sons dont il est question, le rapport très-approché

$$24 : 1;$$

il est moindre que pour le tuyau à base carrée, dans le rapport de

$$6 : 7,07.$$

XVI. Les valeurs de T données dans les n°s XIII et XIV, s'accordent avec une loi générale annoncée par M. Savart, démontrée ensuite analytiquement par M. Cauchy, et que M. Savart a retrouvée plus tard dans les ouvrages du P. Mersenne.

Cette loi consiste en ce que les vibrations de corps semblables considérés dans des circonstances semblables, ont des durées proportionnelles aux dimensions homologues de ces corps. Or la valeur

$$T = \frac{2b}{a\sqrt{1+\frac{14,2}{\pi^2}\cdot\frac{b^2}{l^2}}}.$$

est proportionnelle à b, si $\frac{b}{l}$ reste constant, c'est-à-dire si les tubes sont semblables. De même, la valeur

$$T = \frac{2}{a\sqrt{\frac{p^2}{l^2}+\frac{q^2}{m^2}+\frac{r^2}{n^2}}},$$

donnée dans le n° XIV, est proportionnelle aux dimensions l, m, n, si elles varient proportionnellement, ou, en d'autres termes, si l'on considère des tuyaux semblables; car elle peut se mettre sous la forme

$$T = \frac{2l}{a\sqrt{p^2 + q^2\frac{l^2}{m^2} + r^2\frac{l^2}{n^2}}},$$

et l'on voit qu'elle varie proportionnellement à l si $\frac{l}{m}$, $\frac{l}{n}$ sont constants. Ces résultats vérifient donc la loi en question.

Propagation du mouvement de l'air dans un tuyau conique.

XVII. Considérons maintenant un tuyau conique indéfini, d'une forme quelconque. Prenons son sommet pour origine, et une direction quelconque dans son intérieur, pour axe des x. Soient u le cosinus de l'angle formé par le rayon vecteur r avec cet axe, ω l'angle formé avec l'axe des y par sa projection sur le plan (y, z); on aura, comme on le sait,

$$(1) \qquad \frac{d^2.r\varphi}{dt^2} = a^2\left\{\frac{d^2.r\varphi}{dr^2} + \frac{d\left[(1-u^2)\frac{d.r\varphi}{du}\right]}{r^2\,du} + \frac{1}{r^2(1-u^2)}\frac{d^2.r\varphi}{d\omega^2}\right\}.$$

On donne pour $t = 0$ les valeurs de φ et $\frac{d\varphi}{dt}$ pour tous les points du fluide compris entre deux sphères ayant leurs centres à l'origine, et des rayons égaux respectivement à b et $b + l$. Ces valeurs seront exprimées par deux fonctions de r, u, ω, qui seront nulles pour toute valeur de r non comprise entre b et $b + l$. Les limites des valeurs de u pour lesquelles ces fonctions sont données, varient avec ω; elles partent de 1 et s'étendent, pour chaque valeur de ω, jusqu'à la valeur correspondante à la génératrice du cône qui est située dans le plan passant par l'axe des x et faisant l'angle ω avec l'axe des y. Quant aux valeurs de ω, elles passent de zéro à 2π pour les valeurs de u comprises entre 1 et la plus petite de celles qui déterminent des cônes de révolution autour de l'axe des x, compris entièrement dans le cône donné. A partir de là, les valeurs de ω auront des solutions de continuité entre zéro et 2π, qui dépendront des intersections du cône

donné avec les cônes de révolution, déterminés par les valeurs successives de u.

Cela posé, nous allons chercher la valeur moyenne de $r\varphi$ pour les points situés à la distance r de l'origine; elle aura pour expression

$$\frac{\iint r^2\,du\,d\omega\,.\,\varphi r}{r^2 s} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{s}\iint r\varphi\,du\,d\omega,$$

les intégrales se rapportant à tout l'intérieur du tuyau, et s désignant l'aire que ce tuyau intercepte sur la sphère décrite de l'origine avec l'unité pour rayon.

Posons

$$\iint r\varphi\,du\,d\omega = v,$$

et intégrons les deux membres de l'équation (1) entre les mêmes limites que v, après les avoir multipliés par $du\,d\omega$.

Les deux termes

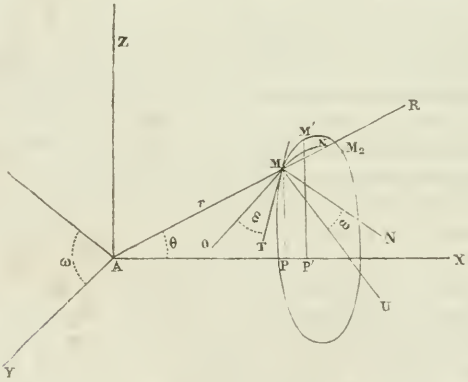
$$\frac{d^2 r\varphi}{dt^2}, \quad \frac{d^2 r\varphi}{dr^2}$$

donneront

$$\frac{d^2 v}{dt^2}, \quad \frac{d^2 v}{dr^2}.$$

Avant d'intégrer les deux autres, nous chercherons l'expression des composantes de la vitesse d'un point quelconque M, suivant trois nou-

Fig. 2.



velles directions rectangulaires; la première MR sera celle du rayon

vecteur r; la seconde MO, celle de la perpendiculaire au plan passant par l'axe des x et le point que l'on considère et du côté opposé au sens de ω croissant; enfin, la troisième MU sera dans ce dernier plan, et perpendiculaire au rayon vecteur, en sens opposé à celui de ζ croissant.

L'expression de la première a été donnée par M. Poisson; elle est $\frac{d\varphi}{dr}$. Nous ne rapporterons pas ici le calcul des deux autres; nous nous bornerons à en donner les valeurs, qui sont respectivement, en grandeurs et en signes,

$$\frac{-\frac{d\varphi}{d\omega}}{r\sqrt{1-u^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{1-u^2}}{r}\frac{d\varphi}{du}.$$

De ces trois expressions, il est facile de déduire la composante normale à la surface du cône, pour une molécule en contact avec cette surface.

En effet, soit ε l'angle de cette normale avec MU, M étant considéré maintenant comme un point de la surface conique; cet angle sera le même que celui de MO avec la tangente MT à la section sphérique, vu que les quatre droites MO, MT, MU, MN sont dans le plan perpendiculaire à AM. Pour avoir la composante de la vitesse suivant MN, il faut projeter les trois composantes rectangulaires de cette vitesse sur cette direction. Celle qui est dirigée suivant MR donnera zéro, et les deux autres donneront

$$(2) \qquad \frac{\sqrt{1-u^2}}{r}\frac{d\varphi}{du}\cos\varepsilon + \frac{1}{r\sqrt{1-u^2}}\frac{d\varphi}{d\omega}\sin\varepsilon,$$

si le point M est tel, que la distance MP à l'axe des x augmente avec ω. Dans le cas contraire, la composante normale de la vitesse aurait pour expression

$$(3) \qquad \frac{\sqrt{1-u^2}}{r}\frac{d\varphi}{du}\cos\varepsilon - \frac{1}{r\sqrt{1-u^2}}\frac{d\varphi}{d\omega}\sin\varepsilon.$$

Cela posé, intégrons d'abord par rapport à u le terme

$$\frac{d\left[(1-u^2)\frac{d.r\varphi}{du}\right]}{r^2\,du}\,du\,d\omega \quad \text{ou} \quad \frac{d\left[(1-u^2)\frac{d\varphi}{du}\right]}{r\,du}\,du\,d\omega,$$

et considérons toujours les différentielles indépendantes du, $d\omega$ comme ayant un signe constant et positif. Nous obtiendrons par cette première intégration

$$\frac{(1-u^2)}{r}\frac{d\varphi}{du}\,d\omega,$$

qu'il faudra prendre entre les limites u_1 et 1. u_1 étant la valeur de u relative au point M du contour. On a ainsi

$$(4)\qquad -\frac{(1-u_1^2)}{r}\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_1 d\omega.$$

qu'il faut intégrer entre $\omega = 0$ et $\omega = 2\pi$. Mais il est nécessaire de commencer par lui donner une autre forme.

Pour cela, décrivons du point P comme centre un arc de cercle partant de M et terminé en N au plan mené par AX, en faisant un angle $d\omega$ avec le plan MAX; cet arc MN sera tangent à MO, et, par conséquent, fera avec le contour de la section sphérique le même angle ε que la ligne MO avec la tangente MT à ce contour. Désignons par ds l'arc infiniment petit de cette courbe compris entre les deux plans qui font entre eux l'angle $d\omega$, nous aurons

$$d\omega = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{MP}} = \frac{\mathrm{MN}}{r\sqrt{1-u^2}},\quad \mathrm{MN} = ds\cos\varepsilon.$$

et l'expression (4) devient la suivante

$$(5)\qquad -\frac{\sqrt{1-u_1^2}}{r^2}\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_1 ds\cos\varepsilon.$$

qu'il faudra intégrer dans toute l'étendue du contour de la section. Mais avant d'opérer cette intégration, il faut en opérer une première sur le dernier terme de l'équation (1), et réunir ces deux résultats.

Ce terme, multiplié par $du\,d\omega$, devient

$$\frac{1}{r^2(1-u^2)}\frac{d^2r\varphi}{d\omega^2}\,du\,d\omega \quad \text{ou} \quad \frac{1}{r(1-u^2)}\frac{d^2\varphi}{d\omega^2}\,du\,d\omega;$$

intégrons-le d'abord par rapport à ω, en laissant u constant, nous obtiendrons

$$(6)\qquad \frac{du}{r(1-u^2)}\cdot\frac{d\varphi}{d\omega}.$$

Or, pour les valeurs de u qui donneront des points de l'intérieur du tuyau, quel que soit ω, il y a continuité dans les éléments de cette intégrale depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 2\pi$; et comme, à ces deux limites, $\frac{d\varphi}{d\omega}$ a la même valeur, l'intégrale est nulle. Il suffit donc de considérer les valeurs de u pour lesquelles la surface conique qu'elles déterminent autour de AX coupe le contour de la section. On aura alors plusieurs intégrales ayant pour limites ces points d'intersection, considérés deux à deux; et l'on devra retrancher les valeurs de l'expression (6) qui se rapportent aux points où la distance MP croît avec ω, des valeurs relatives aux points où MP décroît quand ω augmente.

Supposons, par exemple, que les deux points M, M_2 correspondent à une même valeur de u; que MP augmente avec ω, et que le contraire ait lieu pour M_2 : alors ces deux points donneront, pour l'expression (6),

$$(7) \qquad \frac{du}{r(1-u_2^2)}\left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)_2 - \frac{du}{r(1-u_1^2)}\left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)_1,$$

où l'on regarde toujours du comme positif; et il en serait de même pour les autres couples d'intersections, de la section sphérique avec le cône droit déterminé par la même valeur de u.

Transformons l'expression (7), et, au lieu de du, introduisons ds, auquel nous supposerons la même valeur que précédemment. On a

$$\mathrm{MP} = r\sqrt{1-u^2}, \quad d.\mathrm{MP} = \frac{-ru\,du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Soit M′ le point du contour qui correspond à l'accroissement du; M′P′ une perpendiculaire sur AX, qui fera avec MP un angle infiniment petit : la différence M′P′ − MP ou $d.$MP pourra être regardée comme la projection de MM′ ou ds sur M′P′; elle sera donc égale à ds multiplié par le cosinus de l'angle de la tangente MT avec M′P′ ou avec MP; on peut donc poser

$$d.\mathrm{MP} = ds \cos \mathrm{TMP}.$$

Or, dans l'angle trièdre formé par les lignes MO, MT, MP, l'angle OMP est droit, l'angle OMT est égal à ε, et l'angle des faces OMP,

OMT est égal à PMU ou θ. Donc on a

$$\cos \mathrm{TMP} = \sin \varepsilon \cos \theta = u \sin \varepsilon,$$

donc

$$d.\mathrm{MP} = u\,ds.\sin \varepsilon,$$

et enfin

$$\frac{-ru\,du}{\sqrt{1-u^2}} = u\,ds \sin \varepsilon;$$

d'où, en observant que du et ds sont toujours pris positivement,

$$\frac{r\,du}{\sqrt{1-u^2}} = ds \sin \varepsilon.$$

L'expression (7) devient donc

$$(8) \qquad \frac{ds.\sin \varepsilon_2}{r^2\sqrt{1-u_2^2}}\left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)_2 - \frac{ds.\sin \varepsilon_1}{r^2\sqrt{1-u_1^2}}\left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)_1.$$

Le second terme, réuni à l'expression (5) qui se rapporte au même point M, donne

$$\frac{-\sqrt{1-u_1^2}}{r^2}\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_1 ds \cos \varepsilon_1 - \frac{1}{r^2\sqrt{1-u_1^2}}\left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)_1 ds \sin \varepsilon_1,$$

ce qui n'est autre chose que l'expression (2) multipliée par $\frac{ds}{r}$; et comme cette dernière est la valeur de la composante de la vitesse dans le sens de la normale au tuyau, elle est constamment nulle. Donc tous les termes des intégrales qui se rapportent aux points tels que M, où la distance MP croît avec ω, se détruisent en chacun de ces points.

Passons aux points tels que M_2, où MP décroît quand ω augmente. Pour cela, il faut réunir le premier terme de l'expression (8) à l'expression (5) prise pour le point M_2, ce qui donne

$$\frac{-\sqrt{1-u_2^2}}{r^2}\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_2 ds \cos \varepsilon_2 + \frac{ds.\sin \varepsilon_2}{r^2\sqrt{1-u_2^2}}\left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)_2,$$

quantité égale à zéro, puisqu'elle ne diffère que par le facteur $\frac{ds}{r}$ de l'expression (3) qui est nulle au point M_2.

D'où il résulte que les intégrales des deux derniers termes de l'équation (1), prises par rapport à u et ω dans toute la surface interceptée

par le tuyau sur la sphère de rayon r, sont nulles; et que, par conséquent, l'équation (1), multipliée par $du\,d\omega$ et intégrée dans toute l'étendue de cette même surface, conduit à la suivante

$$\frac{d^2v}{dt^2} = a^2\frac{d^2v}{dr^2}.$$

En appliquant à cette équation la discussion du n° III, on parviendra à des conséquences analogues; et entre autres choses, on reconnaîtra encore que *le mouvement se propage avec la vitesse a dans le tuyau conique, de forme quelconque;* vitesse *qui est encore la même que si le milieu gazeux était indéfini dans tous les sens.*

Propagation du mouvement entre deux plans indéfinis qui se coupent.

XVIII. Nous supposerons que l'ébranlement primitif soit le même dans tous les plans perpendiculaires à l'intersection des deux plans dont il s'agit; nous prendrons cette ligne pour axe des z, et nous déterminerons un point quelconque par sa distance r à cet axe, et par l'angle θ formé par ce point avec le plan zx, qui sera, par exemple, l'un des deux plans donnés.

L'équation (1) du n° I devient alors

$$(1)\qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}\right).$$

La composante de la vitesse dans le plan méridien et perpendiculaire au rayon est $\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{d\theta}$. Désignons par ξ l'angle des deux plans; on devra avoir

$$(2)\qquad \frac{d\varphi}{d\theta} = 0 \quad \text{pour} \quad \theta = 0 \quad \text{et pour} \quad \theta = \xi.$$

Les deux composantes de la vitesse initiale étant connues pour chaque point, ainsi que la condensation, on devra encore satisfaire aux conditions suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} &= \mathrm{F}(r, \theta) \\ \frac{d\varphi}{d\theta} &= f(r, \theta) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \psi(r, \theta) \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Les deux premières font connaître la valeur initiale de φ à une constante arbitraire près, qui n'influera en rien sur les résultats : de sorte qu'on connaît les valeurs de φ et $\frac{d\varphi}{dt}$ pour $t = 0$. Nous pourrons ainsi remplacer les trois dernières conditions par les deux suivantes :

$$(3) \qquad \left.\begin{aligned} \varphi &= \chi(r, \theta) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \psi(r, \theta) \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Multiplions les deux membres de l'équation (1) par $d\theta$, et intégrons-les entre les limites zéro et ε; $\int_0^\varepsilon \frac{d^2\varphi}{d\theta^2} d\theta$ sera nulle, en vertu des équations (2). Si donc nous posons

$$\int_0^\varepsilon \varphi \, d\theta = v,$$

nous aurons

$$(4) \qquad \frac{d^2 v}{dt^2} = a^2 \left(\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr}\right),$$

équation dont on connaît la solution générale au moyen d'intégrales définies simples. Mais il nous sera plus commode ici d'employer des intégrales définies doubles. Pour cela, nous poserons $r^2 = x^2 + y^2$, et l'équation (4) deviendra

$$(5) \qquad \frac{d^2 v}{dt^2} = a^2 \left(\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2}\right).$$

Les valeurs de v et $\frac{dv}{dt}$, relatives à $t = 0$, seront des fonctions de r ou de $\sqrt{x^2 + y^2}$ déterminées par les équations (3); et v sera une fonction de t et $\sqrt{x^2 + y^2}$ exprimée par des intégrales définies doubles, au moyen d'une formule très-connue, donnée par M. Poisson. Et l'on conclut, comme on le sait, de la forme de cette intégrale, que la valeur de v, et, par suite, l'ébranlement du gaz compris entre les deux plans fixes, se propage avec une vitesse égale à a; c'est-à-dire avec la même vitesse que si le milieu était indéfini et libre de tous côtés.

Mouvement de l'air dans un tuyau conique fini.

XIX. Les mouvements des molécules du gaz, dans le sens perpendiculaire à la longueur, n'ayant pas lieu dans les cas ordinaires, comme nous l'avons reconnu dans une discussion précédente, il serait suffisant de considérer les mouvements dans le sens des rayons partant du sommet du cône droit à base circulaire dont une portion finie quelconque forme le tuyau en question. Nous indiquerons néanmoins la marche à suivre pour la solution complète du probleme, en supposant l'ébranlement symétrique autour de l'axe du tuyau. On aura, dans ce cas,

$$(1)\qquad \frac{d^2.r\varphi}{dt^2} = a^2\left\{\frac{d^2.r\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\frac{d\left[(1-u^2)\frac{d.r\varphi}{du}\right]}{du}\right\}.$$

Désignons par β la valeur de u relative aux génératrices de la surface intérieure du tuyau; la vitesse estimée perpendiculairement au rayon vecteur et dans le plan méridien devant être nulle pour les points de cette surface, nous aurons

$$(2)\qquad \frac{d\varphi}{du} = 0 \quad \text{pour} \quad u = 1 \quad \text{et pour} \quad u = \beta.$$

Soit $\varphi r = U\theta$, U étant fonction de u seulement, et θ une fonction de r et t; l'équation (1) deviendra par cette substitution

$$\frac{1}{\theta}\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{a^2}{\theta}\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{a^2}{r^2}\frac{d\left[(1-u^2)\frac{dU}{du}\right]}{U\,du},$$

et il faut que $\frac{d\left[(1-u^2)\frac{dU}{du}\right]}{U\,du}$ soit indépendant de u, sans quoi θ en dépendrait. On devra donc avoir

$$(3)\qquad \frac{d\left[(1-u^2)\frac{dU}{du}\right]}{du} = -\alpha^2 U,$$

α désignant une constante arbitraire; d'ou résulte

$$(4)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\theta}{dr^2} - \frac{\alpha^2\theta}{r^2}\right).$$

L'équation (2) devient alors

$$(5) \qquad \frac{dU}{du} = 0 \quad \text{pour} \quad u = 1 \quad \text{et} \quad u = 6.$$

Si l'on représente par U_1, U_2 deux intégrales particulières de l'équation (3), son intégrale générale sera

$$U = AU_1 + BU_2,$$

A et B étant des constantes arbitraires, et, en vertu de l'équation (5), on devra avoir

$$A\frac{dU_1}{du} + B\frac{dU_2}{du} = 0 \quad \text{pour} \quad u = 1,$$

$$A\frac{dU_1}{du} + B\frac{dU_2}{du} = 0 \quad \text{pour} \quad u = 6.$$

L'une de ces deux équations détermine $\frac{A}{B}$, et substituant sa valeur dans l'autre, on a une équation qui ne renfermera d'indéterminée que la constante α, et donnera pour elle une infinité de valeurs réelles.

Passons maintenant à l'équation (4), et posons

$$\theta = z(M\cos amt + N\sin amt),$$

z ne dépendant que de r; on obtiendra ainsi

$$\frac{d^2z}{dr^2} + z\left(m^2 - \frac{\alpha^2}{r^2}\right) = 0.$$

On peut satisfaire à cette équation au moyen de l'expression suivante

$$z = r^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4\alpha^2}} \int_0^\pi \cos(mr\cos\omega)\sin^{\sqrt{1+4\alpha^2}}\omega\, d\omega.$$

Connaissant une intégrale particulière, on en connaît facilement une seconde. Si on les désigne respectivement par z_1, z_2, la valeur générale de z sera

$$z = Pz_1 + Qz_2,$$

P et Q étant des constantes arbitraires.

En supposant toujours le tube ouvert aux deux bouts, et désignant par b et $b + l$ les valeurs de r correspondantes aux extrémités, on

devra avoir $\frac{dz}{dt} = 0$ pour $r = b$ et $r = b + l$. On doit donc aussi avoir $\frac{d\theta}{dt} = 0$, et, par suite, $z = 0$ pour ces mêmes valeurs de r; ce qui donne

$$Pz_1 + Qz_2 = 0 \quad \text{pour} \quad r = b,$$
$$Pz_1 + Qz_2 = 0 \quad \text{pour} \quad r = b + l;$$

ce qui détermine encore $\frac{P}{Q}$, qui, éliminé entre ces deux équations, conduit à une équation entre α et m; d'où l'on tirera, pour chaque valeur de α, une infinité de valeurs réelles de m.

En ajoutant les solutions relatives à toutes ces valeurs de α et m, multipliées par des constantes arbitraires, on aura une valeur plus générale de $r\varphi$, et il ne restera plus qu'à satisfaire à l'état initial, qui détermine les valeurs de $r\varphi$ et $\frac{d.r\varphi}{dt}$ pour $t = 0$.

Si l'on pose

$$U_1 + \frac{B}{A} U_2 = \upsilon \quad \text{et} \quad z_1 + \frac{Q}{P} z_2 = \zeta,$$

$\frac{B}{A}$ et $\frac{Q}{P}$ étant des fonctions déterminées des constantes α et m, on aura

$$r\varphi = \sum A\upsilon \sum P\zeta \cos amt + \sum A_1 \upsilon \sum P_1 \zeta \sin amt.$$

Dans la somme relative à m, P varie arbitrairement d'une valeur de m à l'autre, et la somme s'étend à toutes les valeurs de m correspondantes à une même valeur de α. Cette sommation étant effectuée, on multipliera le résultat par $A\upsilon$, et l'on fera la somme des expressions semblables relatives à toutes les valeurs de α, la constante A changeant arbitrairement d'une valeur de α à l'autre. Il faut entendre de la même manière la seconde partie de $r\varphi$.

Cela posé, si l'on désigne par $F(r, u)$ et par $f(r, u)$ les valeurs initiales de $r\varphi$ et $\frac{dr\varphi}{dt}$, on devra avoir

$$\sum A\upsilon \sum P\zeta = F(r, u), \quad \sum A_1 u \sum P_1 \zeta m = \frac{1}{a} f(r, u),$$

équations qui détermineront les constantes A, P, A_1, P_2 par les méthodes ordinaires.

Nous allons considérer maintenant le cas particulier où φ est indépendant de u; ce qui revient à ne prendre que la valeur $\alpha = 0$, dans le calcul général que nous venons d'indiquer.

Tuyau conique ouvert par les deux bouts.

XX. La valeur de φ étant supposée indépendante de u, on a

$$(1) \qquad \frac{d^2 r\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2(r\varphi)}{dr^2}.$$

Le tuyau étant en communication avec l'air extérieur, à ses deux extrémités, on aura

$$(2) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad r = b \quad \text{et pour} \quad r = b + l;$$

et, de plus, on aura, d'après l'état initial,

$$(3) \qquad \varphi = \mathrm{F}(r), \quad \frac{d\varphi}{dt} = f(r) \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

On satisfera à l'équation (1) en prenant

$$r\varphi = (\mathrm{A} \sin mat + \mathrm{B} \cos mat)(\sin mr + \mathrm{M} \cos mr),$$

et l'on devra avoir, en vertu de l'équation (2),

$$\sin mb + \mathrm{M} \cos mb = 0,$$
$$\sin(mb + ml) + \mathrm{M} \cos(mb + ml) = 0.$$

Éliminant M, on obtient

$$\sin ml = 0,$$

d'où

$$m = \frac{n\pi}{l},$$

n désignant un nombre entier quelconque.

La valeur de $r\varphi$ prendra ainsi la forme suivante, en remplaçant M par sa valeur $-\operatorname{tang} mb$.

$$r\varphi = \left(\mathrm{A} \sin \frac{n\pi at}{l} + \mathrm{B} \cos \frac{n\pi at}{l}\right) \sin \frac{n\pi(r-b)}{l},$$

A et B désignant des constantes arbitraires, qui changent avec les valeurs de n; et il suffira de considérer ces dernières comme positives,

car les valeurs négatives donneraient des expressions qui rentreraient dans les premières.

Ajoutant les intégrales particulières correspondantes à toutes les valeurs de n, on aura

$$(4) \qquad r\varsigma = \sum \left(A \sin \frac{n\pi a t}{l} + B \cos \frac{n\pi a t}{l} \right) \sin \frac{n\pi (r-b)}{l},$$

et les coefficients A et B seront déterminés par les équations (3), qui donnent

$$\sum B \sin \frac{n\pi (r-b)}{l} = rF(r),$$

$$\sum nA \sin \frac{n\pi (r-b)}{l} = \frac{rl}{\pi a} f(r).$$

On tire de là

$$A = \frac{2}{n\pi a} \int_b^{b+l} rf(r) \sin \frac{n\pi (r-b)}{l} dr,$$

$$B = \frac{1}{l} \int_b^{b+l} rF(r) \sin \frac{n\pi (r-b)}{l} dr.$$

En prenant ces valeurs pour A et B, l'équation (4) donne la solution complète de la question.

On en tire d'abord cette conséquence, que tous les points reviennent périodiquement à l'état de repos après un intervalle de temps T ayant pour valeur

$$T = \frac{2l}{a},$$

ce qui montre que *le son rendu par un tuyau conique est le même que celui que rend un tuyau cylindrique de même longueur, ouvert aux deux bouts comme le premier.*

Si l'on considère le son simple correspondant à une seule valeur de n, les valeurs de r correspondantes aux sections où la condensation est constamment nulle, et que l'on désigne ordinairement sous le nom de *ventres*, seront données par l'équation

$$\sin \frac{n\pi (r-b)}{l} = 0,$$

ou

$$r = b + \frac{k}{n} l,$$

k désignant un nombre entier quelconque.

Le nombre des ventres est donc $n+1$; ils sont situés aux extrémités du tuyau, et aux points qui le divisent en n parties égales. Si $n = 1$, on a le son simple le plus grave, et il n'y a de ventres qu'aux deux extrémités.

Les *nœuds* ou les points qui sont constamment en repos s'obtiendront en posant

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0.$$

Pour le son simple correspondant à une valeur quelconque de n, cette équation devient

$$\operatorname{tang} \frac{n\pi(r-b)}{l} = \frac{n\pi r}{l}.$$

Elle détermine une infinité de valeurs réelles pour r; mais on ne prendra que celles qui sont comprises entre

$$b \quad \text{et} \quad b + l.$$

Elles pourront se mettre sous la forme

$$r = b + \frac{l\alpha}{n\pi}.$$

Les valeurs successives de α sont respectivement comprises entre

$$0 \text{ et } \frac{\pi}{2}, \quad \pi \text{ et } \pi + \frac{\pi}{2}, \quad 2\pi \text{ et } 2\pi + \frac{\pi}{2},$$

et ainsi de suite; elles vont en se rapprochant de leur limite supérieure, avec laquelle elles peuvent bientôt être regardées comme confondues, et alors elles ont entre elles une différence sensiblement constante et égale à π. Les valeurs de r tendent donc à avoir une différence constante et égale à $\frac{l}{n}$, comme pour les ventres : elles sont respectivement comprises entre

$$b \text{ et } b + \frac{l}{2n}, \quad b + \frac{l}{n} \text{ et } b + \frac{l}{n} + \frac{l}{2n}, \quad b + \frac{2l}{n} \text{ et } b + \frac{2l}{n} + \frac{l}{2n}, \quad \text{etc.}$$

Tuyau conique fermé par les deux bouts.

XXI. Dans ce cas, les conditions relatives aux extrémités sont exprimées par l'équation

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \text{pour} \quad r = b \quad \text{et} \quad r = b + l.$$

On posera encore

$$r\varphi = (\mathrm{A} \sin mat + \mathrm{B} \cos mat)(\sin mr + \mathrm{M} \cos mr),$$

et les constantes m, M seront déterminées par les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \operatorname{tang} ml = \dfrac{ml}{1 + (b + bl)m^2}, \\ \mathrm{M} = \dfrac{mb \cos mb - \sin mb}{mb \sin mb + \cos mb}. \end{cases}$$

La valeur de $r\varphi$ devient, en désignant par A et B deux nouvelles constantes arbitraires,

$$(2) \quad r\varphi = (\mathrm{A} \sin mat + \mathrm{B} \cos mat)[\sin m(r - b) + mb \cos m(r - b)].$$

En faisant la somme des expressions de cette forme correspondantes à toutes les racines de l'équation (2), et déterminant les coefficients A et B par les méthodes ordinaires, on satisfera à l'état initial, et, par conséquent, à toutes les conditions de la question.

Examinons en particulier le mouvement qui produit un quelconque des sons simples que le tuyau peut rendre; c'est-à-dire, considérons la valeur de φ donnée par l'équation (2) dans laquelle m est l'une quelconque des racines positives de l'équation (1), autre que la racine zéro, à laquelle il est inutile d'avoir égard.

Ces racines sont comprises respectivement entre

$$\frac{\pi}{l} \text{ et } \left(\frac{\pi + \frac{\pi}{2}}{l}\right), \quad \frac{2\pi}{l} \text{ et } \left(\frac{2\pi + \frac{\pi}{2}}{l}\right), \ldots, \quad \frac{n\pi}{l} \text{ et } \left(\frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l}\right), \quad \text{etc.}$$

elles se rapprochent de plus en plus de leur limite inférieure $\frac{n\pi}{l}$, et tendent, par suite, à avoir entre elles la différence constante $\frac{\pi}{2l}$.

L'équation (2) fait voir que chaque point devient périodiquement au repos après un temps T dont la valeur est

$$T = \frac{2\pi}{ma}.$$

et comme ml est incommensurable, *ce son n'a pas de rapport commensurable avec celui que rendrait un tuyau cylindrique de même longueur.*

Quand la racine m varie, le ton s'élève dans le même rapport.

La position des ventres sera déterminée par l'équation

$$\frac{d\tau}{dt} = 0,$$

qui donne

$$\operatorname{tang} m(r - b) = -mb,$$

les valeurs de r tirées de cette équation et comprises entre r et $r + l$ correspondront à tous les ventres. Si l'on désigne par ω le plus petit arc positif ayant pour tangente $-mb$, ces valeurs équidifférentes seront comprises dans la formule suivante

$$r = b + \frac{\theta + n\pi}{m},$$

n étant un nombre entier quelconque tel que l'on n'ait pas

$$\frac{\theta + n\pi}{m} > l.$$

Les nœuds correspondent aux valeurs de r tirées de

$$\frac{d\tau}{dt} = 0,$$

ou de

$$\operatorname{tang} m(r - b) = \frac{m(r - b)}{1 + m^2 br},$$

équation qui est satisfaite évidemment par $r = b$, et aussi par $r = b + l$, en vertu de l'équation (1); ce qui devait être, en effet, d'après les hypothèses mêmes du calcul. Le nombre des valeurs intermédiaires augmente indéfiniment avec m; mais leurs différences ne sont pas

égales. Si m est tres-grand, ces différences sont sensiblement egales à $\frac{\pi}{m}$.

Tuyau conique ouvert par la base la plus large et fermé par l'autre.

XXII. Les équations relatives à ce cas sont :

$$\frac{d^2 r\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 r\varphi}{dr^2},$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \text{pour} \quad r = b,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad r = b + l.$$

On posera d'abord

$$r\varphi = (\mathrm{A} \sin mat + \mathrm{B} \cos mat)(\sin mr + \mathrm{M} \cos mr),$$

et les conditions des extrémités donneront

$$(1) \qquad \begin{cases} \operatorname{tang} ml = -mb, \\ \mathrm{M} = -\operatorname{tang} m(b + l). \end{cases}$$

la valeur de $r\varphi$ devient alors, en désignant par A et B deux nouvelles constantes arbitraires,

$$(2) \qquad r\varphi = (\mathrm{A} \sin mat + \mathrm{B} \cos mat) \sin m(b + l - r).$$

En faisant la somme de toutes les expressions de cette forme, relatives aux diverses racines de l'équation (1), on déterminera facilement les valeurs de A et B de manière à satisfaire à l'état initial.

Si l'on considère le son simple correspondant à une valeur unique de m, tout ce qui s'y rapporte est renfermé dans l'équation (2). On en tire d'abord pour la durée de la vibration entière,

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{ma},$$

d'ou l'on voit que, pour les différents modes de division dont le tuyau est susceptible, l'acuité du son est proportionnelle à la grandeur de la racine correspondante de l'équation (1).

Les ventres seront déterminés par l'équation

$$\sin m(b + l - r) = 0.$$

d'où

$$r = b + l - \frac{n\pi}{m},$$

n désignant un nombre entier quelconque. Ils partent de l'extrémité ouverte, et sont équidistants les uns des autres; le dernier est à une distance de l'extrémité fermée, dont le rapport avec l'intervalle constant $\frac{\pi}{m}$ varie avec la racine m.

Les nœuds sont donnés par l'équation

$$\operatorname{tang} m(b + l - r) = -mr,$$

à laquelle $r = b$ satisfait d'après l'équation (1); les valeurs de r comprises entre b et $b + l$ détermineront les autres surfaces nodales: leurs distances ne seront pas égales, mais différeront d'autant moins que m sera plus grand.

Tuyau conique fermé à l'extrémité la plus large, et ouvert à l'autre.

XXIII. Les équations seront, dans ce nouveau cas,

$$\frac{d^2 r\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 r\varphi}{dr^2},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad r = b,$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \text{pour} \quad r = b + l.$$

On satisfera à l'équation générale en prenant

$$\varphi r = (\mathrm{A} \sin mat + \mathrm{B} \cos mat)(\sin mr + \mathrm{M} \cos mr),$$

les conditions des extrémités donneront

$$(1) \qquad \begin{cases} \sin mb + \mathrm{M} \cos mb = 0, \\ \operatorname{tang} ml = m(b + l), \end{cases}$$

d'où résulte l'expression suivante de φr,

$$(2) \qquad \varphi r = (\mathrm{A} \sin mat + \mathrm{B} \cos mat) \sin m(r - b).$$

On satisferait à l'état initial en faisant la somme d'expressions semblables relatives à toutes les racines de l'équation (1), et déterminant convenablement les constantes arbitraires A et B.

Considérons en particulier l'un quelconque des sons simples, relatif à une valeur unique de m, et déterminé par l'équation (2).

La durée de l'oscillation sera exprimée par

$$T = \frac{2\pi}{ma};$$

les ventres seront déterminés par l'équation

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad \sin m(r - b) = 0,$$

d'ou

$$r = b + \frac{n\pi}{m}.$$

Les ventres sont donc distants les uns des autres de la quantité constante $\frac{\pi}{m}$: ils partent de l'extrémité ouverte et se terminent à une distance plus ou moins grande de l'autre, mais inférieure toutefois à $\frac{\pi}{m}$.

Les nœuds sont donnés par l'équation

$$\operatorname{tang} m(r - b) = mr.$$

Elle est satisfaite par

$$r = b - l,$$

d'après l'équation (1). Les nœuds partent donc de l'extrémité fermée, et leurs distances mutuelles sont variables.

Tuyau formé par quatre plans, dont deux sont parallèles.

XXIV. Supposons maintenant un tuyau formé par deux plans qui se coupent, et par deux autres, perpendiculaires à l'intersection des deux premiers, et terminé à deux surfaces cylindriques ayant pour axe commun cette même intersection. Négligeons encore les mouvements dans le sens des sections cylindriques, pour ne nous occuper que de ceux qui produisent les sons que fait entendre le plus ordinaire-

ment le tuyau. En employant les mêmes variables que dans le n° XVIII. et observant que, dans l'hypothèse actuelle, φ est indépendant de l'angle θ, nous aurons

$$(1)\qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right).$$

Nous supposerons le tuyau ouvert aux deux bouts, et nous désignerons par b et $b+l$ les valeurs de r qui s'y rapportent; il en résultera les conditions

$$(2)\qquad \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad r = b \quad \text{et} \quad r = b + l.$$

L'état initial est donné, et entraîne les conditions

$$\varphi = \mathrm{F}(r), \quad \frac{d\varphi}{dt} = f(r) \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Si l'on pose

$$\varphi = (\mathrm{A}\sin a\alpha t + \mathrm{B}\cos a\alpha t)\,u,$$

u étant une fonction de r seulement, on aura, d'après l'équation (1),

$$(3)\qquad \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \alpha^2 u = 0.$$

La valeur générale de u sera, en désignant par M et N deux constantes arbitraires,

$$(4)\quad u = \mathrm{M}\int_0^\pi \cos(\alpha r\cos\omega)\,d\omega + \mathrm{N}\int_0^\pi \cos(\alpha r\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)\,d\omega,$$

et les équations (2) conduiront aux suivantes

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{M}\int_0^\pi \cos(\alpha b\cos\omega)\,d\omega \\ &+\mathrm{N}\int_0^\pi \cos(\alpha b\cos\omega)\log(b\sin^2\omega)\,d\omega = 0, \\ &\mathrm{M}\int_0^\pi \cos[\alpha(b+l)\cos\omega]\,d\omega \\ &+\mathrm{N}\int_0^\pi \cos[\alpha(b+l)\cos\omega]\log[(b+l)\sin^2\omega]\,d\omega = 0. \end{aligned}\right.$$

En éliminant entre elles $\frac{M}{N}$, on obtient

$$(6)\left\{\begin{aligned}&\int_0^\pi \cos[\alpha(b+l)\cos\omega]\,d\omega\int_0^\pi \cos(b\alpha\cos\omega)\log(b\sin^2\omega)\,d\omega\\&=\int_0^\pi \cos(b\alpha\cos\omega)\,d\omega\int_0^\pi \cos[(b+l)\alpha\cos\omega]\log[(b+l)\sin^2\omega]\,d\omega,\end{aligned}\right.$$

équation qui détermine une infinité de valeurs réelles de α, et ne saurait en avoir d'imaginaires.

L'une des équations (5) détermine le rapport $\frac{N}{M}$ en fonction de α, soit

$$\frac{N}{M} = P.$$

on aura

$$(7)\qquad u = M(u_1 + Pu_2),$$

en désignant par u_1, u_2 les deux intégrales particulières de l'équation (1),

$$\int_0^\pi \cos(\alpha r\cos\omega)\,d\omega,$$

et

$$\int_0^\pi \cos(\alpha r\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)\,d\omega,$$

on aura ainsi pour φ la valeur suivante

$$\varphi = (A\sin a\alpha t + B\cos a\alpha t)(u_1 + Pu_2),$$

A et B restant entièrement indéterminées.

On obtiendra une valeur plus générale de φ en faisant la somme d'expressions semblables, correspondantes à toutes les racines de l'équation (6); ce qui donnera

$$(8)\qquad \varphi = \sum(A\sin a\alpha t + B\cos a\alpha t)(u_1 + Pu_2).$$

et il ne restera qu'à satisfaire à l'état initial; ce qui conduit aux deux

équations

$$(9)\quad \begin{cases} \sum B(u_1 + Pu_2) = F(r), \\ \sum A\alpha(u_1 + Pu_2) = \frac{1}{a}f(r), \end{cases}$$

au moyen desquelles nous allons déterminer A et B.

Si, pour abréger, nous faisons

$$u_1 + Pu_2 = U,$$

cette fonction de r et α satisfera à l'équation

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} + \alpha^2 U = 0,$$

et l'on démontrera facilement que si U′ et U″ sont deux valeurs de U correspondantes à deux valeurs différentes de α, et satisfaisant aux conditions des limites, comme cela résulte des valeurs de α et P, on aura nécessairement

$$(10)\quad \int_b^{b+l} U'U''\,r\,dr = 0.$$

Les équations (9) prennent la forme suivante :

$$\sum BU = F(r),$$

$$\sum A\alpha U = \frac{1}{a}f(r).$$

Multipliant les deux membres de ces équations par $U\,r\,dr$, et intégrant entre b et $b+l$, tous les termes disparaîtront en vertu de l'équation (10), excepté celui qui correspond à la valeur de α qui entre dans la valeur de U que l'on considère. On aura donc

$$B = \frac{\int_b^{b+l} rUF(r)\,dr}{\int_b^{b+l} U^2 r\,dr}, \quad A = \frac{1}{a\alpha}\frac{\int_b^{b+l} rUf(r)\,dr}{\int_b^{b+l} U^2 r\,dr}.$$

En prenant ces valeurs pour A et B, l'équation (8) donne la solution complete de la question.

XXV. Les valeurs de α étant incommensurables entre elles, les oscillations ne seront isochrones que lorsque la valeur de φ ne renfermera que l'une des racines de l'équation (6); ce qui suppose un état initial convenable. Le mouvement de l'air dans le tube sera alors déterminé par l'équation

$$\varphi = (\mathrm{A} \sin a\alpha t + \mathrm{B} \cos a\alpha t)\,\mathrm{U}.$$

La durée des oscillations isochrones aura pour expression

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{a\alpha},$$

et le son le plus grave correspondra à la plus petite valeur de α.

Les valeurs de r correspondantes aux ventres s'obtiendront en posant

$$\mathrm{U} = 0,$$

ou

$$(11)\quad \int_0^\pi \cos(\alpha r \cos\omega)\,d\omega + \mathrm{P}\int_0^\pi \cos(\alpha r \cos\omega) \log(r \sin^2\omega)\,d\omega = 0.$$

Si l'on suppose P tiré de la première des équations (5), cette dernière ne diffère de l'équation (6) qu'en ce que r y remplace $b + l$; et, par conséquent, elle est satisfaite par $r = b$ et $r = b + l$, comme cela devait être, puisque, par hypothèse, les extrémités du tuyau sont des ventres. Pour avoir les autres valeurs de r qui déterminent les ventres correspondants à la même valeur de α, il suffira de poser

$$\alpha_m r = \alpha(b + l),$$

α_m désignant l'une quelconque des racines de l'équation (6). Car alors l'équation (11) sera satisfaite en vertu de l'équation (6).

Les ventres seront donc déterminés par la formule générale

$$r = \frac{\alpha}{\alpha_m}(b + l).$$

et comme les ventres qui se forment dans l'intérieur du tuyau correspondent à des valeurs de r comprises entre b et $b + l$, on ne donnera à α_m que la valeur de la racine α et des racines plus grandes que α, et moindres que $\alpha\left(\frac{b+l}{b}\right)$.

Les nœuds s'obtiendraient en posant

$$\frac{dU}{dr} = 0;$$

mais les racines de cette équation ne pourraient être calculées aussi simplement que celles de l'équation (11).

XXVI. Si le tuyau était ouvert à l'extrémité la plus large, et fermé à l'autre, on aurait

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \text{pour} \quad r = b,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad r = b + l,$$

d'où résulteraient les deux équations

$$\int_0^\pi \cos[\alpha(b+l)\cos\omega]\,d\omega + P\int_0^\pi \cos[\alpha(b+l)\cos\omega]\log[(b+l)\sin^2\omega]\,d\omega = 0,$$

$$\int_0^\pi \cos\omega\sin(\alpha b\cos\omega)\,d\omega$$

$$- P\left[\int_0^\pi \cos\omega\sin(\alpha b\cos\omega)\log(b\sin^2\omega)\,d\omega - \frac{1}{\alpha b}\int_0^\pi \cos(\alpha b\cos\omega)\,d\omega\right] = 0.$$

Éliminant P, on aurait l'équation suivante pour déterminer α.

$$\int_0^\pi \cos[\alpha(b+l)\cos\omega]\,d\omega \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^\pi \cos\omega\sin(\alpha b\cos\omega)\log(b\sin^2\omega)\,d\omega \\ \displaystyle - \frac{1}{\alpha b}\int_0^\pi \cos(\alpha b\cos\omega)\,d\omega \end{array} \right\}$$

$$= \int_0^\pi \cos\omega\sin(\alpha b\cos\omega)\,d\omega \left\{ \int_0^\pi \cos[\alpha(b+l)\cos\omega]\log[(b+l)\sin^2\omega]\,d\omega \right\}.$$

On achèverait comme dans le cas précédent, et l'on traiterait de la même manière le cas où l'extrémité la plus large serait fermée et l'autre ouverte, ainsi que celui où elles seraient fermées l'une et l'autre.

Lorsque nous connaîtrons des expériences faites par quelque physicien sur quelques-unes des questions traitées dans ce Mémoire, nous nous empresserons de les comparer aux indications de nos calculs, et de faire connaître l'accord ou le désaccord que nous y remarquerons.

MÉMOIRE

SUR LA THÉORIE DES DIAMÈTRES RECTILIGNES DES COURBES QUELCONQUES;

PAR L. WANTZEL [*].

Euler s'est occupé de la recherche des diamètres rectilignes dans un Mémoire qui fait partie de la *Collection de Berlin* pour 1745; mais ce grand géomètre n'est arrivé à aucun résultat remarquable, et la question a été à peine effleurée. En effet, il se borne à présenter les considérations géométriques relatives à la déduction des diamètres et à chercher péniblement les équations de courbes qui présentent trois ou quatre diamètres rectilignes.

Il reste à trouver la loi de succession des diamètres, les conditions pour qu'une courbe en présente un certain nombre limité ou illimité, et enfin toutes les formes particulières que peuvent offrir les courbes de cette espèce.

Nous avons pensé qu'il serait intéressant de poursuivre ces recherches et de faire connaître complétement les propriétés des diamètres rectilignes des courbes quelconques.

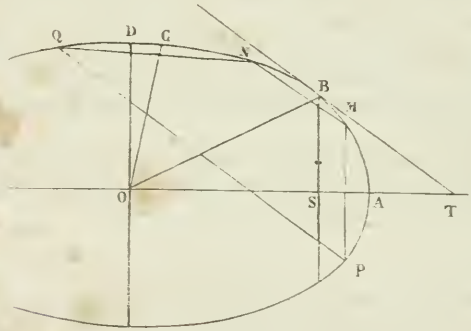
I.

Une courbe peut avoir un seul diamètre rectiligne : elle ne présente pas alors d'autre particularité que le genre de symétrie qui résulte de la définition même du diamètre. S'il y a deux diamètres conjugués l'un de l'autre, la courbe n'offrira également rien de remarquable; seulement cette symétrie sera double, ce qui influe assez peu, en général, sur l'ensemble des propriétés de la courbe.

[*] Wantzel avait déjà publié un extrait de ce Mémoire dans le Journal l'*Institut*. Nous donnons ici le Mémoire complet, tel que M. Bertrand l'a trouvé dans les papiers que l'auteur a laissés à sa mort. (J. L.)

Mais si une courbe possède deux diamètres rectilignes non conjugués qui se coupent, elle en aura nécessairement un troisième, puis un quatrième, et ainsi de suite jusqu'à l'infini, à moins qu'on ne revienne sur un diamètre déjà obtenu. Cette proposition fondamentale a été indiquée par Euler; mais la marche qu'il a suivie ne lui a pas permis d'en tirer les conséquences.

Soient OA, OB les deux diamètres de la courbe; imaginons une conique, ellipse ou hyperbole, construite sur ces deux diamètres avec les mêmes directions de cordes. Il est facile de déterminer cette conique en se donnant la longueur d'un diamètre, et toutes les coniques semblables jouiront de la même propriété. On pourra donc en faire passer une QBP par un point quelconque M de la courbe proposée. Par le point M, menons la corde MP, divisée en deux parties égales par le diamètre OA, et par les points M et P menons les cordes MN, PQ correspondantes au diamètre OB; joignons NQ et partageons cette ligne en parties égales par le diamètre OC de la conique. La



position de ce diamètre est déterminée et indépendante du point M. En effet, les aires des secteurs QOB, BOP sont égales, ainsi que celles de BON, BOM; d'où il résulte évidemment

$$NOC = MOA,$$
$$BOC = BOA.$$

Donc, le diamètre OC forme avec OB un secteur équivalent à celui

que comprennent les diamètres OA et OB. Il en résulte que non-seulement ce diamètre resterait le même, quelle que fût la position du point M sur la conique, mais qu'on le trouvera encore pour une conique semblable construite sur les mêmes diamètres OA, OB.

Si maintenant nous comparons la courbe proposée à la conique, les points M, P, N, Q appartiennent aux deux courbes d'après la définition des diamètres, et la droite OC divise en deux parties égales une corde QN de la courbe. Mais en faisant passer une conique semblable par un autre point M′, on eût trouvé une autre corde Q′N′ parallèle à QN, puisque, dans la conique, elle correspond au même diamètre OC. Comme cette corde et les analogues seraient divisées en parties égales par ce diamètre, on en doit conclure que la droite OC est un diamètre de la courbe proposée. Ainsi *toute courbe dans laquelle il y a deux diamètres qui se coupent en possède un troisième passant par leur point de concours; ces trois diamètres forment des secteurs égaux dans une conique construite sur les deux premiers diamètres avec les mêmes directions de cordes.*

Si l'on opère ensuite sur le point N de la conique par rapport au diamètre OC comme on l'a fait sur le point M et sur le diamètre OB, on trouvera un quatrième diamètre OD qui, par la même raison, appartiendra également à la courbe proposée. Ce diamètre formera avec OC un secteur DOC équivalent aux secteurs COB et BOA. En continuant de la même manière, on obtiendra un nombre indéfini de diamètres de la courbe proposée qui jouiront tous de la même propriété.

Donc, *tous les diamètres rectilignes d'une courbe quelconque appartiennent à une conique dans laquelle ils correspondent aux mêmes cordes que dans la courbe proposée et forment avec le contour de la conique des secteurs équivalents.*

Il résulte de là que la plupart des propriétés des diamètres des coniques s'appliquent à ceux d'une courbe quelconque. Ainsi, par exemple, si l'on rapporte la courbe à un diamètre rectiligne et à ses cordes, le produit des coefficients d'inclinaison d'un autre diamètre et de ses cordes par rapport au premier sera une quantité constante.

II.

Il reste à reconnaître, par l'inspection seule des deux premiers diamètres et de leurs cordes, quelle sera la nature de la conique. Cette distinction est très-facile. En effet, si l'on se donne la longueur du diamètre OB, la parallèle BT aux cordes de ce diamètre sera tangente en B; et la courbe sera une ellipse ou une hyperbole selon que la parallèle BS aux cordes de l'autre diamètre OA tombera du côté du point O ou de l'autre côté.

On en conclut que *la courbe proposée sera du genre elliptique ou hyperbolique selon que la parallèle aux cordes du premier diamètre, menée par le point de concours, passera dans l'angle formé par le second diamètre et la direction de ses cordes ou qu'elle les laissera du même côté.*

Si les deux premiers diamètres étaient des axes, et dans ce cas seulement, la conique serait un cercle. Il est évident que tous les autres diamètres sont alors également des axes formant entre eux des angles égaux.

Un cas *intermédiaire* que nous avons écarté tacitement, se présente ici : c'est celui où les deux diamètres correspondraient à la même direction de cordes, en sorte qu'il n'existerait plus de conique susceptible d'être construite sur ces diamètres.

Soient M un point de la courbe proposée et OA et OB les deux diamètres [*]. On construira les points P, N, Q de la courbe sur la ligne droite AB comme sur la conique, et l'on trouvera le diamètre OC dont la position sera déterminée et indépendante du point M, puisque

$$BC = AB.$$

En continuant la même construction, on obtiendra une série de droites OC, OD, etc., qui intercepteront des parties égales sur toute parallèle aux cordes. La droite OC divise en deux parties égales une corde QN de la courbe proposée. Si l'on prenait un autre point M', on trouverait une autre corde Q'N', parallèle à QN, qui serait aussi

[*] On peut suivre sur la même figure.

divisée en parties égales par OC. Donc OC est un diamètre de la courbe proposée, et il en est de même de toutes les droites consécutives OD, OE, etc.

Ainsi, *dans le cas intermédiaire* où les diamètres correspondent à la même direction de cordes, *la courbe proposée a une infinité de diamètres qui concourent au même point et qui interceptent sur une même direction des grandeurs égales.*

III.

Dans tout ce qui précède, nous avons toujours supposé que les deux diamètres de la courbe proposée se coupassent. Si une courbe possède deux diamètres parallèles, on pourra toujours construire une parabole sur ces diamètres avec la même direction de cordes. En faisant passer cette parabole par un point de la courbe et en opérant comme sur les autres coniques, on trouve une série de diamètres parallèles et équidistants qui devront appartenir à la courbe proposée.

Donc, lorsqu'*une courbe a deux diamètres parallèles, elle en a une infinité d'autres équidistants entre eux et qui appartiennent tous à une parabole dans laquelle ils correspondent aux mêmes cordes.*

Il peut arriver aussi que ces diamètres divisent les mêmes cordes en deux parties égales.

Telles sont les principales propriétés géométriques des courbes qui possèdent des diamètres rectilignes.

IV.

Nous allons passer maintenant à la recherche des conditions *analytiques* relatives à la succession des diamètres et à la détermination de leur nombre. Supposons deux diamètres qui se coupent comme précédemment, et rapportons la courbe au premier diamètre et à la direction de ses cordes. Soient ensuite m et n les coefficients d'inclinaison du second diamètre et de ses cordes. On voit de suite que la courbe sera du genre *elliptique* ou *hyperbolique* selon que m et n seront de signes contraires ou de même signe.

Considérons d'abord le cas *elliptique*. L'aire comprise entre les deux premiers diamètres d'une des ellipses conjuguées à la courbe a

pour expression $\omega \frac{ab}{2}$, en désignant par ω l'angle du secteur circulaire correspondant. Les diamètres suivants forment avec le premier des aires doubles, triples, etc., en sorte que les angles ω obtenus de la même manière seront doubles, triples, etc., du premier. Mais les inclinaisons m et n sont liées simplement à l'angle ω.

En effet, on a

$$m = \frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{OS}}\,[*], \quad n = -\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{ST}},$$

d'où

$$\frac{m}{n} = -\frac{\mathrm{ST}}{\mathrm{OS}};$$

d'ailleurs,

$$\mathrm{OS} = \mathrm{OA}\cos\omega, \quad \mathrm{ST} = \mathrm{OA}\,\frac{\sin^2\omega}{\cos\omega},$$

donc

$$\frac{m}{n} = -\operatorname{tang}^2\omega.$$

Si l'on désigne par m' et n' les inclinaisons du troisième diamètre et de ses cordes sur le premier, on aura pareillement

$$\frac{m'}{n'} = -\operatorname{tang}^2 2\omega;$$

puis, en continuant la même notation,

$$\frac{m''}{n''} = -\operatorname{tang}^2 3\omega, \quad \frac{m'''}{n'''} = -\operatorname{tang}^2 4\omega, \ldots.$$

On peut, du reste, éliminer $\operatorname{tang}\omega$ et trouver les relations qui lient entre elles les inclinaisons des diamètres successifs. Pour cela, il faut développer, ce qui donne

$$\frac{m'}{n'} = -\frac{4\operatorname{tang}^2\omega}{(1-\operatorname{tang}^2\omega)^2} = \frac{4\dfrac{m}{n}}{\left(1+\dfrac{m}{n}\right)^2},$$

$$\frac{m''}{n''} = -\frac{3\operatorname{tang}\omega - \operatorname{tang}^2\omega)^2}{(1-3\operatorname{tang}^2\omega)^2} = \frac{\dfrac{m}{n}\left(3+\dfrac{m}{n}\right)^2}{\left(1+3\dfrac{m}{n}\right)^2},$$

et ainsi de suite.

---

[*] Même figure.

Si l'on joint à ces relations la condition $mn = m'n' = m''n''$, etc., que nous avons signalée plus haut, on pourra déterminer l'inclinaison d'un diamètre de rang quelconque et celle de ses cordes.

L'aire elliptique comprise entre les deux premiers diamètres est égale à $\omega \frac{ab}{2}$, comme nous l'avons vu ci-dessus; elle est, par conséquent, commensurable avec l'ellipse entière, si l'angle ω l'est lui-même avec quatre droits.

Ainsi, pour étudier les diamètres rectilignes d'une courbe du genre elliptique, il faut égaler $\frac{m}{n}$ à $-\operatorname{tang}^2 \omega$; si l'angle ω est commensurable avec quatre droits, elle aura plusieurs diamètres dont le nombre sera marqué par le nombre de fois que la commune mesure sera contenue dans quatre droits (ou la moitié si ce nombre est pair); dans le cas contraire, la courbe sera nécessairement une ellipse ou une série d'ellipses concentriques et semblables.

Dans le cas *hyperbolique*, les aires successives seront également représentées par $z\frac{ab}{2}$, $2z\frac{ab}{2}$, etc., en désignant par z l'aire du secteur d'une hyperbole équilatère correspondant au secteur compris entre les deux premiers diamètres. Pour retrouver ici des relations aussi simples que dans l'autre cas, il est convenable d'introduire des lignes trigonométriques hyperboliques. Si l'on désigne par x et y les coordonnées rectangles du point B′ qui correspond au point B dans l'hyperbole équilatère, l'aire du secteur est $l(x+y) = z$; d'où l'on tire, à cause de $x^2 - y^2 = 1$,

$$x = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos \operatorname{hyp} z, \quad y = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sin \operatorname{hyp} z.$$

Le rapport $\frac{m}{n}$ des inclinaisons du second diamètre et de ses cordes est toujours égal à $\frac{\mathrm{TS}}{\mathrm{OS}}$; or,

$$\mathrm{OS} = \cos \operatorname{hyp} z, \quad \mathrm{ST} = \mathrm{OS} - \mathrm{OT} = \cos \operatorname{hyp} z - \frac{1}{\cos \operatorname{hyp} z} = \frac{\sin^2 \operatorname{hyp} z}{\cos \operatorname{hyp} z};$$

donc

$$\frac{m}{n} = \operatorname{tang}^2 \operatorname{hyp} z.$$

On voit que l'on obtient le même résultat que pour le cas elliptique, en remplaçant les lignes trigonométriques par les lignes hyperboliques et en changeant le signe. Il est inutile de faire remarquer que les relations en vertu desquelles $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, etc., se déduisent de $\frac{m}{n}$, s'appliqueront alors sans modification aux deux genres de courbes.

Pour le cas *intermédiaire*, le coefficient n est constant et les inclinaisons m, m', m'', etc., croissent évidemment en progression arithmétique.

Lorsqu'il s'agit d'une courbe à diamètres parallèles, c'est, au contraire, m qui est constante, et n varie en raison inverse de la distance au premier diamètre, puisque les diamètres de la courbe appartiennent tous à une parabole; de plus, comme ils sont équidistants, n croît aussi en progression arithmétique. Il ne faut pas oublier que n peut être également constant pour ce genre de courbes.

V.

De tout ce qui précede, on peut facilement conclure qu'il sera possible de construire une courbe possédant autant de diamètres que l'on voudra. Il n'y a pas lieu de s'occuper du cas de deux diamètres, parce qu'ils sont toujours conjugués.

Cherchons la forme générale de l'équation des courbes qui ont p diamètres rectilignes. Pour cela, rappelons-nous qu'un point quelconque de la courbe est situé sur une ellipse construite sur les mêmes diametres, dont l'équation sera de la forme

$$y^2 - mnx^2 = C,$$

en conservant les notations ci-dessus.

Le point de la courbe sera déterminé par l'intersection de cette ellipse avec la droite

$$y = \operatorname{tang} \alpha \sqrt{-mn},$$

si l'on appelle α l'angle du secteur circulaire qui correspond au sec-

teur elliptique déterminé par cette direction. La courbe proposée sera représentée généralement par ces deux équations, en y regardant C comme une fonction de α. Mais si la courbe doit avoir p diamètres rectilignes, il résulte de la loi de succession que plusieurs points de l'ellipse appartiennent à la courbe et qu'ils correspondent à des valeurs de α en progression arithmétique dont la raison est 2ω.

Cet angle ω est toujours celui qui satisfait à la condition

$$\tang^2 \omega = -\frac{m}{n}.$$

et qui, dans ce cas, doit être égal à $\frac{2\pi}{p}$. Alors, C doit être une fonction périodique de α qui ne change pas quand α augmente de $\frac{4k\pi}{p}$; d'un autre côté, on voit que cette fonction ne change pas de signe avec α.

L'équation suivante

$$y^2 - mnx^2 = \sum A_k \cos \frac{kp\alpha}{2}.$$

dans laquelle k désigne un nombre quelconque entier et positif, représente donc toujours une courbe qui a p diamètres rectilignes.

La courbe sera algébrique si le nombre des termes du second membre est limité; mais elle le serait encore dans un grand nombre d'autres cas, si, par exemple, on remplace le premier membre par $\frac{1}{y^2 - mnx}$, ou par toute autre fonction algébrique de la même quantité.

La plus simple des courbes de ce genre est une courbe du troisième degré à trois diamètres. Nous la déduirons de la forme ci-dessus, en prenant $\frac{1}{(\cos\alpha)^{\frac{2}{3}}}$ pour la fonction périodique du second membre, ce qui donne

$$(y^2 - mnx^2)^{-\frac{2}{3}} = \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Or

$$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = -\frac{\sqrt{-mn}\,(4mnx + 3(y - mnx))}{(y - mnx)^{\frac{2}{3}}}.$$

à cause de

$$y = x \operatorname{tang} \alpha \sqrt{-mn}.$$

L'équation sera donc

$$3xy^2 + mnx^3 = -\frac{1}{\sqrt{-mn}}.$$

Si l'on fait $mn = -1$, on obtient la courbe

$$3xy^2 - x^3 = -1,$$

qui possède trois axes.

Pour les courbes du genre *hyperbolique*, on les représentera également par la combinaison de l'équation de l'hyperbole

$$y^2 - mnx^2 = C,$$

avec l'equation de la droite

$$y = x \operatorname{tang} \alpha \sqrt{-mn}.$$

en regardant C comme fonction de α.

La quantité α est ici l'aire du secteur d'hyperbole équilatere qui correspond à celui que détache sur l'hyperbole le rayon vecteur dont l'équation est rapportée ci-dessus. On verra, comme pour l'autre cas, que la fonction C ne doit pas changer quand α augmente d'un multiple de $2z$; en sorte qu'on sera conduit à cette forme générale de l'équation

$$y^2 - mnx^2 = \sum A_k \cos \frac{k\alpha\pi}{z}.$$

La quantité z est toujours l'aire du secteur hyperbolique équilatere correspondant au secteur formé par les deux premiers diamètres, et l'on a

$$\operatorname{tang}^2 \operatorname{hyp} z = \frac{m}{n}.$$

Les courbes de ce genre sont toutes transcendantes.

Pour obtenir une courbe de cette espèce assez facile à construire, nous supposerons $mn = 1$ et $z = \pi$, ce qui détermine m et n, et nous

prendrons les deux équations

$$y^2 - x^2 = \cos^2 \alpha, \quad y = x \operatorname{tang hyp} \alpha;$$

comme

$$\operatorname{tang hyp} \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}},$$

on en conclut

$$\frac{y+x}{y-x} = e^{2\alpha},$$

d'où

$$y + x = e^\alpha \cos \alpha, \quad y - x = e^{-\alpha} \cos \alpha.$$

Sous cette forme, on construira commodément la courbe en question, et l'on reconnaîtra qu'elle est composée de feuilles qui partent toutes de l'origine et qui aboutissent à l'hyperbole

$$y^2 - x^2 = 1;$$

ces feuilles vont donc en s'allongeant, et elles ont chacune un diamètre qui finit par converger indéfiniment vers l'asymptote de cette courbe.

Le cas *intermédiaire* se rapproche un peu du précédent, et l'on pourrait déduire qui lui convient de celles que nous venons d'obtenir, en faisant tendre n vers l'infini. Mais on arrive plus rapidement si l'on remarque que, pour chaque valeur de x, on doit trouver des points de la courbe en faisant varier l'inclinaison suivant une progression arithmétique dont la raison soit le double de l'inclinaison des deux premiers diamètres.

Ainsi, l'équation doit exprimer que x est une fonction de $\frac{y}{x}$ qui ne change pas quand $\frac{y}{x}$ augmente d'une quantité donnée, ce qui conduit à

$$x = \sum A_k \cos \frac{k\pi x}{my}.$$

On peut prendre pour exemple

$$x = \cos 3\frac{y}{x}.$$

et l'on trouve également une série de feuilles émanant du même point, mais qui aboutissent à une parallèle à l'axe des y.

Il ne reste plus qu'à faire connaître le type de l'équation des courbes à diamètres parallèles. On devra les considérer comme données par l'équation d'une parabole

$$y^2 - 2anx = C,$$

combinée avec celle de plusieurs parallèles à l'axe des x; il faut que C ne change pas quand y augmente d'un multiple de $2a$, si a représente la distance des diamètres. Ainsi, l'on arrive à la forme

$$y^2 - 2anx = \sum A_k \cos \frac{k\pi y}{a},$$

qui ne représente que des courbes transcendantes.

Enfin, si les diamètres parallèles doivent correspondre aux mêmes cordes, on a évidemment

$$x = \sum A_k \cos \frac{k\pi y}{a},$$

puisque x est une fonction périodique de y.

NOUVELLE MÉTHODE

POUR TROUVER LES CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ

DES FONCTIONS DIFFÉRENTIELLES:

PAR M. J. BERTRAND

La question d'analyse qui fait l'objet de ce Mémoire a été traitée par un grand nombre de géomètres. Euler, Condorcet, Lexell, Lagrange, Poisson s'en sont successivement occupés, et plus récemment MM. Sarrus et Joachimsthal y ont consacré des Mémoires intéressants. Moi-même, dans un premier Mémoire qui fait partie du tome XVII du *Journal de l'École Polytechnique*, j'ai essayé de simplifier ces recherches en donnant une démonstration extrêmement simple de la formule élégante d'Euler. J'ai, de plus, indiqué, pour effectuer l'intégration quand elle est possible, deux méthodes, dont l'une conduit à la formule déjà trouvée par Poisson.

La plupart des travaux que je viens de citer semblent avoir pour but principal la démonstration simple de la formule d'Euler. Ils doivent peut-être en partie leur origine à une erreur propagée par Lagrange et Poisson, qui croyaient qu'Euler n'avait pas donné une démonstration complète de sa formule. Cette démonstration est cependant exposée, comme je l'ai fait voir, dans son *Traité du Calcul intégral*, et surpasse en simplicité toutes celles qui ont été proposées depuis.

Mais cette condition d'intégrabilité, dont la démonstration a été donnée tant de fois, est, on doit le dire, malgré sa forme élégante, d'une application fort pénible. Il faut exécuter, pour en faire usage,

un grand nombre de différentiations, et quand elle est satisfaite, ce sont des opérations nouvelles qui font connaître l'intégrale dont l'existence a été démontrée.

La méthode que je propose dans ce Mémoire diffère notablement de celle d'Euler, et il faudrait des calculs compliqués pour vérifier directement leur concordance; elle ne conduit pas, il est vrai, à une condition aussi élégante, mais les opérations auxquelles elle donne naissance ont un grand avantage de simplicité. C'est en intégrant la fonction proposée qu'on s'assure qu'elle est intégrable, et chacune des opérations est suivie d'une vérification qui, si elle ne réussit pas, dispense de continuer le calcul. On a ainsi un avantage tout à fait analogue à celui que présente, en algèbre, la méthode des racines commensurables qui, sans donner une formule pour déterminer ces racines, fait connaître une série d'opérations à l'aide desquelles on peut constater leur existence, et dont une seule suffit souvent pour apprendre qu'il n'en existe pas.

I.

Soit

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y_n)$$

une expression dans laquelle y désigne une fonction indéterminée de x, et $y', y'', \ldots, y_n$ ses dérivées. La dérivée de F est, comme on sait,

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y' + \frac{dF}{dy'}y'' + \ldots + \frac{dF}{dy^n}y_{n+1},$$

et l'on voit qu'elle est, quel que soit F, linéaire par rapport à la dérivée de l'ordre le plus élevé, y_{n+1}.

D'après cette remarque, pour qu'une fonction différentielle $\varphi(x, y, y', \ldots, y_{n+1})$ soit une dérivée exacte, il est nécessaire qu'elle soit de la forme

$$\varphi = P + Q y_{n+1},$$

P et Q renfermant seulement les n premières dérivées de y.

Si, de plus, on désigne par F l'intégrale de la fonction φ, d'après

ce qui précede, on doit avoir

$$Q = \frac{dF}{dy_n}.$$

et, par conséquent,

$$F = \int_0^{y_n} Q\,dy_n + \psi(x, y, y', \ldots, y_{n-1}),$$

l'intégrale $\int_0^{y_n} Q\,dy_n$ devant être prise en considérant $x, y, \ldots y_{n-1}$ comme des constantes.

Pour déterminer la fonction inconnue ψ, il faut former la dérivée de F et l'égaler à $P + Qy_n$; on trouvera aussi, en désignant $\int_0^{y_n} Q\,dy_n$ par k,

$$P - \frac{dk}{dx} - \frac{dk}{dy}y' - \frac{dk}{dy'}y'' - \ldots - \frac{dk}{dy_{n-1}}y_n = \left(\frac{d\psi}{dx}\right),$$

$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)$ désignant ici la dérivée complète de la fonction ψ.

Le premier membre de l'égalité précédente doit donc être une dérivée exacte, et c'est en l'intégrant que l'on pourra connaître la fonction ψ qui, ajoutée à k, donnera la fonction cherchée F. Il résulte alors de ce qui précède que l'expression

$$P - \frac{dk}{dx} - \frac{dk}{dy}y' - \ldots - \frac{dk}{dy_{n-1}}y_n;$$

doit être de la forme

$$P_1 + Q_1 y_n,$$

P_1 et Q_1 étant indépendants de y_n. Si cela n'a pas lieu, il est inutile de continuer les opérations, l'expression proposée n'est pas intégrable. Si cela a lieu, on verra, comme plus haut, que l'on a

$$\psi = \int_0^{y_{n-1}} Q_1\,dy_{n-1} + \psi_1 = k_1 + \psi_1,$$

et que

$$\frac{d\psi_1}{dx} = P_1 - \frac{dk_1}{dx} - \frac{dk_1}{dy}y' - \ldots - \frac{dk_1}{dy_{n-1}}y_{n-1};$$

le second membre de cette équation devra être de la forme

$$P_2 + Q_2 y_{n-1}.$$

P_2 et Q_2 étant indépendants de y_{n-1}, et, si cela n'a pas lieu, l'expression proposée ne peut être une dérivée exacte.

En supposant que

$$\frac{d\psi_1}{dx} = P_2 + Q_2 y_{n-1},$$

on aura, comme plus haut,

$$\psi_1 = \int_0^{y_{n-2}} Q_2\, dy_{n-2} + \psi_2 = k_2 + \psi_2,$$

et

$$\frac{d\psi_2}{dx} = P_2 - \frac{dk_2}{dx} - \frac{dk_2}{dy} y' - \ldots - \frac{dk_2}{dy_{n-3}} y_{n-2},$$

et il faudra encore que le second membre de cette expression soit linéaire par rapport à y_{n-2}.

En continuant à raisonner de la même manière, on ramènera l'intégration proposée à celle d'une expression dont l'ordre sera de moins en moins élevé, et, enfin, à celle d'une expression de la forme

$$P_n + Q_n y',$$

où P_n et Q_n ne dependront que de x et y. Or on connaît la condition d'intégrabilité d'une semblable expression et l'on sait l'intégrer dans le cas où elle est remplie.

L'avantage principal que présente la méthode précédente consiste dans la série des vérifications qui, si l'expression n'est pas intégrable, permettent, en général, de s'en apercevoir presque immédiatement.

II.

L'application de la méthode précédente exige des intégrations, la condition d'Euler a l'avantage de n'exiger que des différentiations; mais nous allons faire voir que, lors même qu'on ne pourrait pas effectuer les opérations indiquées dans le paragraphe précédent, il serait encore possible de décider si l'intégration est possible.

Reprenons l'expression

$$\varphi = P + Q y_{n+1};$$

si nous posons

$$\int_0^{y_n} Q\, dy_n = k,$$

la premiere des conditions d'intégrabilité consiste en ce que l'expression

$$(a) \qquad P - \frac{dk}{dx} - \frac{dk}{dy} y' - \ldots - \frac{dk}{dy_{n-1}} y_n$$

doit être de la forme

$$P_1 + Q_1 y_n.$$

Or je vais montrer que l'on pourra toujours savoir si cette condition est remplie, et former, si elle l'est, les fonctions P_1 et Q_1. Si, en effet, nous remplaçons k par sa valeur, l'expression (a) prend la forme

$$(a) \qquad \left\{ \begin{aligned} & P - \int_0^{y_n} \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dQ}{dy} y' - \ldots - \frac{dQ}{dy_{n-2}} y_{n-1} \right) dy_n \\ & - y_n \int_0^{y_n} \frac{dQ}{dy_{n-1}}\, dy_n. \end{aligned} \right.$$

Pour que cette équation soit linéaire par rapport à y_n, il faut et il suffit que sa dérivée, par rapport à y_n, soit indépendante de cette lettre, c'est-à-dire que

$$(b) \qquad \frac{dP}{dy_n} - \frac{dQ}{dx} y' - \ldots - \frac{dQ}{dy_{n-2}} y_{n-1} - y_n \frac{dQ}{dy_{n-1}} - \int_0^{y_n} \frac{dQ}{dy_{n-1}}\, dy_n,$$

soit indépendante de y_n, ou que la dérivée, par rapport à y_n, soit nulle, ce que l'on peut évidemment vérifier sans effectuer aucune intégration.

En supposant cette condition remplie, l'intégrale $\int_0^{y_n} \frac{dQ}{dy_{n-1}}\, dy_n$ sera par cela même connue, et égale à la différence des valeurs que prend l'ensemble des autres termes de l'expression (b) quand on y fait successivement $y_n = 0$, $y_n = y_n$. Il en résulte que cette expression (b),

et, par conséquent, la valeur de Q_1 peut être regardée comme connue. On peut également connaître P_1 sans effectuer aucune intégration, car cette fonction sera la différence de l'expression (a) et du produit connu $Q_1 y_n$, c'est-à-dire

$$(c)\quad \left\{\begin{aligned} &P - \int_0^{y_n}\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dQ}{dp}y' - \ldots - \frac{dQ}{dy_{n-2}}y_{n-1}\right)dy_n \\ &- y_n\int_0^{y_n}\frac{dQ}{dy_{n-1}}\,dy_n - Q_1 y_n. \end{aligned}\right.$$

En remarquant que, dans cette expression, l'intégrale $\int_0^{y_n}\frac{dQ}{dy_{n-1}}\,dy_n$ est connue, et que, de plus, on sait d'avance que y_n doit disparaître du résultat, on en conclura que la seule intégrale inconnue

$$\int_0^{y_n}\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dQ}{dy}y' - \ldots - \frac{dQ}{dy_{n-2}}y_{n-1}\right)dy_n,$$

pourra être calculée, et sera la différence des valeurs que prennent les autres termes de l'expression (c) pour $y_n = y_n$ et $y_n = 0$.

Ayant formé l'expression

$$P_1 + Q_1 y_n,$$

on opérera sur elle comme sur

$$P + Q y_{n+1},$$

et l'on ramenera son intégration à celle d'une expression d'ordre moindre,

$$P_2 + Q_2 y_{n-1},$$

dont la formation n'exigera que des différentiations, et, en continuant ainsi, on sera conduit à une expression de la forme

$$P_n + Q_n y',$$

dont les conditions d'intégrabilité sont connues.

III.

Si la fonction différentielle proposée contenait les dérivées de deux fonctions indépendantes l'une de l'autre y et z, la méthode précédente serait encore applicable. On considérerait l'une des deux fonctions, z par exemple, comme une fonction connue de x, et l'on appliquerait la méthode précédente comme s'il n'y avait que la fonction y qui restât indéterminée; il n'y aurait rien à changer à la série des opérations.

IV.

Je terminerai en donnant quelques exemples de l'application de la méthode précédente :

1°. Soit l'expression

$$y^2 + 2xyy' + xy'' + x^2y'' - y' = P + Qy''.$$

on a

$$P = y^2 + (2xy - 1)y' + xy'', \quad Q = x^2.$$

par conséquent,

$$\int_0^{y''} Q\,dy'' = \int_0^{y''} x^2\,dy'' = x^2y'' = k_1,$$

l'expression désignée plus haut par

$$P - \frac{dk}{dx} - \frac{dk}{dy}y' - \frac{dk}{dy'}y'',$$

est ici

$$y^2 + (2xy - 1)y' + xy'' - 2xy''$$
$$= y^2 + (2xy - 1)y' - xy'' = P_1 + Q_1y'',$$

P_1 étant ici égal à $y^2 + (2xy - 1)y'$ et Q_1 à $-x$. l'intégrale

$$\int_0^{y'} Q_1\,dy' = \int_0^{y'} -x\,dy' = -xy' = k_1,$$

et, par conséquent,

$$P_1 - \frac{dk_1}{dx} - \frac{dk_1}{dy} y' = y^2 + (2xy - 1) y' + y'$$
$$= y^2 + 2xyy' = P_2 + Q_2 y',$$

l'intégrale

$$\int_0^y Q_2 \, dy^2 = \int_0^y 2xy \, dy = y^2 = k_2,$$

et, par conséquent,

$$P_2 - \frac{dk_2}{dx} = y^2 - y^2 = 0;$$

en sorte que l'intégrale demandée est égale à

$$k + k_1 + k_2 = x^2 y'' - xy' + xy^2.$$

2°. Considérons encore l'expression

$$z' \sqrt{1 + y'^2} - y' \sqrt{1 + z'^2} + \frac{zy'y''}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{yz'z}{\sqrt{1+z'^2}},$$

où z et y désignent deux fonctions quelconques de x dont z', y', z'', y'' sont les dérivées. Pour intégrer cette expression, nous commencerons par intégrer le coefficient de y'' en y considérant y' comme seule variable, nous aurons

$$(1) \qquad \int_0^{y'} \frac{zy' \, dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = z \sqrt{1 + y'^2} - z.$$

Si nous retranchons de l'expression proposée la dérivée complete de cette intégrale, il reste

$$z' - y' \sqrt{1 + z'^2} - \frac{yz'z}{\sqrt{1+z'^2}};$$

il faut intégrer cette expression et ajouter le résultat a l'intégrale (1) trouvée plus haut. Pour faire cette intégration, il faut intégrer le coefficient de y' en y considérant y comme seule variable, et on a

$$-\int_0^y dy \sqrt{1 + z'^2} = -y \sqrt{1 + z'^2}.$$

Si nous retranchons de l'expression précédente la dérivée complète de cette intégrale, il reste z', dont l'intégrale est z, en sorte que l'intégrale demandée est

$$z\sqrt{1+y'^2} - z - y\sqrt{1+z'^2} + z,$$

ou

$$z\sqrt{1+y'^2} - y\sqrt{1+z'^2}.$$

Ces deux exemples suffisent pour montrer combien est facile l'application de notre méthode. Si l'on cherche à leur appliquer la règle d'Euler, on reconnaîtra que les calculs à faire pour reconnaître que l'intégration est possible seraient plus longs que ceux qui permettent d'en trouver le résultat. Cet avantage de simplicité sera d'autant plus sensible que les expressions considérées seront plus compliquées et d'un ordre plus élevé.

P. S. Dans un premier Mémoire qui fait partie du *Journal de l'École Polytechnique*, tome XVII, j'ai donné sous une forme géométrique assez élégante la condition nécessaire pour qu'une expression de la forme

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

soit une différentielle exacte; quoique ce résultat n'ait pas un rapport direct avec le Mémoire précédent, je saisis cette occasion de déclarer que Clairaut en a fait usage dans sa *Théorie de la figure de la terre*, et qu'il n'était, par conséquent, pas nouveau lorsque je l'ai rencontré.

Note relative au Mémoire précédent; par M. Sarrus.

Le 25 mars 1849, j'ai adressé à l'Académie des Sciences une petite réclamation relative à un Mémoire de M. Bertrand sur les conditions d'intégrabilité des fonctions différentielles. Cette Lettre contenait en même temps une méthode que, depuis plusieurs années, je développe dans mes cours et dont même j'ai fait usage dans un Mémoire non encore publié, mais présenté depuis longtemps à l'Académie. Il me

semble que ma méthode est plus complète que celle de M. Bertrand, et que, du moins, dans le cas de plusieurs variables, elle peut faire éviter bien des tentatives inutiles. Je crois donc devoir donner ici non ma méthode elle-même, mais ce que je regarde comme nécessaire pour compléter celle de M. Bertrand.

Conformément à la notation de M. Bertrand en supposant que y, z, etc., expriment des fonctions quelconques de x, je désignerai leurs dérivées successives par

$$y', \quad y'', \quad y''', \ldots, \quad y_m, \quad y_{m+1}, \ldots; \quad z', \quad z'', \quad z''', \ldots, \quad z_m, \quad z_{m+1}, \ldots$$

Je supposerai, en outre, que

$$u = f(x, y', y'', \ldots, y_m; z, z', z'', \ldots, z_m, \ldots) \quad \text{et} \quad v = du;$$

dès lors, on aura identiquement

$$\begin{aligned} \frac{1}{dx} \cdot v = \frac{du}{dx} &+ \frac{du}{dy} y' + \frac{du}{dy'} y'' + \frac{du}{dy''} y''' + \ldots + \frac{du}{dy_m} y_{m+1} \\ &+ \frac{du}{dz} z' + \frac{du}{dz'} z'' + \frac{du}{dz''} z''' + \ldots + \frac{du}{dz_m} z_{m+1} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et l'on en conclura que :

1°. Les plus hautes dérivées y_{m+1}, z_{m+1}, etc., des variables composantes ne peuvent entrer qu'à la première puissance dans une différentielle exacte;

2°. Les coefficients $\frac{du}{dy_m}$, $\frac{du}{dz_m}$, etc., de ces plus hautes dérivées ne doivent renfermer aucune des dérivées y_{m+1}, z_{m+1}, etc., elles doivent être tout au plus de même ordre que l'intégrale u, par rapport à chacune des variables composantes considérées séparément.

Cette dernière condition paraît avoir échappé à M. Bertrand; elle peut cependant servir à arrêter bien des tentatives infructueuses.

M. Bertrand ne parle pas des différentielles exactes d'un ordre plus élevé que le premier. Cependant, la même méthode peut servir à trouver immédiatement et sans intégration intermédiaire l'intégrale primitive d'une différentielle exacte d'un ordre quelconque. En effet :

Si w exprime une différentielle exacte $d^i u$ de l'ordre i, les termes de l'expression $\frac{v}{dx^i}$, qui doivent renfermer les plus hautes dérivées des variables composantes, seront

$$\frac{du}{dy_m} y_{m+i} + \frac{du}{dz_m} z_{m+i} + \ldots.$$

et l'on en conclura que :

A. Les plus hautes dérivées y_{m+i}, z_{m+i}, etc., des variables composantes, ne peuvent entrer qu'à la première puissance dans une différentielle exacte d'un ordre quelconque ;

B. Les coefficients $\frac{du}{dy_m}$, $\frac{du}{dz_m}$, etc., de ces plus hautes dérivées doivent être tout au plus du même ordre que l'intégrale primitive u, par rapport à chacune des variables composantes considérées séparement.

Maintenant on pourra résoudre la question suivante :

« Étant donnée une fonction différentielle quelconque w, trouver » 1° si elle est une différentielle exacte; 2° quel est l'ordre de cette » différentielle; 3° enfin, quelle est son intégrale primitive. »

Pour cela :

1°. On commencera par voir si elle satisfait à la condition A ; si, par cas, il en est ainsi,

2°. On écrira cette fonction sous la forme

$$w = L + dx^i (P y_{m+i} + Q z_{n+i} + \ldots).$$

et l'on cherchera la plus grande valeur possible de i qui permet de satisfaire à la condition B. Apres cela

3°. On cherchera des fonctions P_1, Q_1, R_1, etc., au moyen des intégrales partielles

$$P_1 = \int_0^1 P\, dy_m, \quad Q_1 = \int_0^1 Q\, dz_n, \ldots,$$

ce qui donnera

$$P = \frac{dP}{dy_m}, \qquad Q = \frac{dQ}{dz_n}, \ldots$$

4°. On calculera la différence $w - d^i (P_1 + Q_1 + \ldots)$, ce qui

donnera une nouvelle fonction w_1 d'un ordre moins élevé que w, par rapport à chacune des variables y, z, etc., et que l'on traitera de la même manière.

Si l'on parvient à épuiser ainsi tous les termes de la fonction w, on finira par la réduire à la forme

$$w = d^i u_1 + d^k u_2 + d^l u_3 + \ldots,$$

et, par suite, w sera une différentielle exacte d'un ordre égal au plus petit des nombres i, k, l, etc., et son intégrale primitive sera facile à exprimer au moyen des fonctions u_1, u_2, u_3, etc.

La démonstration du procédé est trop facile pour qu'il soit nécessaire de l'ajouter ici. Je crois même que, dans les applications, il est préférable de passer par les intégrales intermédiaires, du moins tant qu'on ne sait pas, à priori, que la fonction donnée est une différentielle exacte d'un ordre connu.

REMARQUE SUR UN MÉMOIRE DE M. BERTRAND;

PAR M. J.-A. SERRET

Dans un Mémoire qui fait partie du xxxe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, M. Bertrand a démontré ce beau théorème :

Si une fonction de n quantités a moins de n valeurs, elle n'en a au plus que deux.

Ce théorème avait été démontré auparavant par M. Cauchy pour le cas de n premier ou égal à 6.

La démonstration de M. Bertrand exige qu'entre $\frac{n}{2}$ et $n-2$ il y ait un nombre premier p : ce fait a été vérifié pour les valeurs de n supérieures à 7, jusqu'à 6 000 000; mais comme il n'a pas lieu pour $n=6$, M. Bertrand a cru son raisonnement en défaut pour ce cas particulier. Ayant eu l'occasion d'enseigner cette théorie à la Faculté des Sciences, j'ai reconnu que si $\frac{n}{2}$ est un nombre premier, on peut prendre $p=\frac{n}{2}$, sans que la démonstration éprouve aucune modification. Le lemme suivant, sur lequel est fondé le théorème principal, continue en effet d'avoir lieu :

Si une fonction de n lettres a moins de n valeurs, on pourra former deux groupes, l'un de p lettres, l'autre de deux lettres, tels que la fonction ne soit pas changée par une permutation circulaire opérée sur l'un de ces groupes.

Seulement ce lemme serait en défaut dans le cas où l'on prendrait $p=\frac{n}{2}$ si, au lieu de ces mots, *a moins de n valeurs*, on mettait ceux-ci, *n'a pas plus de n valeurs*; d'où il suit qu'on ne peut plus dire

avec M. Bertrand, dans le cas de $p = \frac{n}{2}$, *si une fonction de n lettres a n valeurs, elle est symétrique par rapport à* $n - 1$ *lettres*. Cette dernière assertion est la seule qui ne soit pas démontrée par la méthode de M. Bertrand, lorsque entre $n - 2$ et $\frac{n}{2}$ il n'y a pas de nombre premier, mais que $\frac{n}{2}$ est premier. On sait d'ailleurs que cette assertion est inexacte pour les fonctions de six lettres.

On voit, par ces remarques, que les recherches de M. Bertrand rendent inutile la démonstration ingénieuse, mais bien compliquée, de M. Cauchy pour les fonctions de six lettres, puisque $\frac{6}{2}$ ou 3 est un nombre premier.

NOTE

SUR LES POLYÈDRES SYMÉTRIQUES DE LA GÉOMÉTRIE;

PAR M. A. BRAVAIS,
Professeur à l'École Polytechnique.

On dit que deux polyèdres sont symétriques, lorsqu'ils ont été construits semblablement l'un au-dessus, l'autre au-dessous d'un plan, avec la condition, pour leurs sommets homologues, d'être également distants du plan, et sur une même droite normale à ce plan. (LEGENDRE, *Géométrie*, liv. 6.)

Je nommerai polyèdres *inverses* deux polyedres dont les sommets homologues sont également distants d'un point donné et situés sur une même droite passant par ce point, mais de côtés opposés.

Je désignerai par P le premier polyèdre, suppose donné, et par p son inverse. On voit que, réciproquement, P sera l'inverse de p.

Je nommerai *pôle de symétrie* des deux polyèdres le point par lequel passent toutes les droites joignant deux à deux les sommets homologues des deux polyèdres.

Si l'on considère les deux polyèdres P, p comme formant un polyèdre unique (P, p), ce même point sera dit *centre de symétrie* du polyèdre (P, p).

THÉORÈME I. *Lorsque le pôle de symétrie du polyèdre fixe* P *se déplace, son inverse* p *se change en un nouvel inverse* p', *et l'on peut toujours transporter* p *sur* p' *par un mouvement de translation commun à tous les sommets.*

Soient C, *fig.* 1, *Pl. I*, le premier pôle de symétrie et C′ le deuxième; soit S un sommet quelconque du polyèdre fixe P; soient s son homologue avant le déplacement de C, et s' son homologue après ce déplacement.

De $Cs = CS$, $C's' = C'S$ on déduit $ss' = 2CC'$; de plus, ss' est parallèle à CC'. Soient de même t, t' les deux positions successives d'un autre sommet du polyèdre inverse; on aurait aussi $tt' = 2CC'$. tt' parallèle à CC'. Donc, si l'on transporte le polyèdre p en le faisant mouvoir, de C vers C', parallèlement à CC', et d'une quantité égale à 2CC', il viendra coïncider avec le polyèdre p'. *C. Q. F. D.*

Corollaire. Il suit de là qu'un polyèdre P étant donné, son inverse est complétement déterminé quant à sa forme et aussi quant à la direction de ses parties par rapport à l'espace absolu; toutefois le lieu qu'il doit occuper reste indéterminé, et dépend de la position du pôle de symétrie.

Théorème II. *Dans deux polyèdres inverses, les faces homologues sont égales chacune à chacune, et l'inclinaison de deux faces adjacentes, dans un de ces solides, est égale à l'inclinaison des faces homologues dans l'autre.*

Ce théoreme se démontrerait, comme la proposition II du liv. 6 de Legendre, en substituant des triangles opposés par le sommet aux trapèzes de même base employés dans la démonstration; mais on peut l'obtenir plus simplement de la manière suivante :

Soit proposé de démontrer que les arêtes, angles plans et angles dièdres qui composent l'angle solide S, *fig.* 2, sont les mêmes que leurs homologues dans le polyèdre inverse. Le choix du pôle de symétrie étant arbitraire, prenons S pour pôle; prolongeons les arêtes SM, SN, SP, SQ, de $Sm = SM$, $Sn = SN$, $Sp = SP$, $Sq = SQ$, etc. Les deux angles solides opposés auront évidemment leurs arêtes égales deux à deux par construction, leurs angles plans égaux deux à deux comme opposés par le sommet, et leurs angles dièdres pareillement égaux comme opposés au sommet; or ces arêtes, angles plans ou angles dièdres sont homologues dans le polyedre et dans son inverse. La même démonstration peut s'appliquer à tous les angles solides, par conséquent à toutes les arêtes, à tous les angles plans et à tous les angles dièdres : donc les faces sont égales et également inclinées de part et d'autre. *C. Q. F. D.*

Théorème III. *Si l'on fait tourner de deux angles droits le polyèdre p inverse de* P *autour d'une droite passant par le pôle de symé-*

trie C, *le polyèdre* p' *ainsi obtenu sera le symétrique de* P *par rapport au plan mené par* C *normalement à l'axe de rotation.*

Soient NN', *fig.* 3, la droite donnée et QCQ' son plan normal passant par C; soient S un sommet quelconque du polyèdre P, et s son homologue dans le polyèdre inverse. De s abaissez la perpendiculaire sr sur NN' et prolongez-la en s', à une distance $rs' = rs$. Il est visible qu'après un demi-tour effectué autour de NN', s viendra en s'. Joignons S et s'. Puisque l'on a $sC = CS$, $sr = rs'$, Ss' sera parallèle à NN', et, par conséquent, normale au plan QQ'. Si R est le point de rencontre de Ss' avec le plan QQ', la droite CR sera normale à NN', et, par conséquent, parallèle à ss'; or on a $sC = CS$, donc aussi SR = Rs'. Donc s' est le sommet homologue de S dans le polyèdre construit symétriquement par rapport à P au-dessous du plan QQ'. Il en serait de même pour tout autre sommet du polyèdre P; donc une rotation de deux angles droits autour de NN' amènera l'inverse p en coïncidence avec le symétrique p' de P par rapport au plan QQ'. *C. Q. F. D.*

Scolie. Le plan QCQ' peut être appelé plan de symétrie du polyèdre (P, p') considéré comme un polyèdre unique.

THÉORÈME IV. *Réciproquement, le symétrique* p' *de* P *par rapport au plan quelconque* QQ', *en tournant de deux droits autour d'une normale au plan, devient l'un des inverses de* P, *et le pôle de symétrie est situé au point de rencontre* C *du plan et de l'axe de rotation.*

Car si l'on construit l'inverse p, en prenant C pour pôle de symétrie, p et p' peuvent être amenés à coïncidence, p sur p', ou p' sur p, par une rotation de deux angles droits autour de NN'.

Corollaire I. Il résulte des deux théorèmes précédents que les divers polyèdres symétriques de P ne sont autre chose, quant à leur forme, que son polyèdre inverse, et sont, quant à la direction de leurs parties, les divers polyèdres obtenus par des demi-révolutions de l'inverse p, effectuées autour d'axes arbitrairement choisis.

Deux polyèdres inverses d'un polyèdre donné P sont toujours semblablement tournés dans l'espace. Il n'en est pas de même de deux polyèdres symétriques de P, à moins que les deux plans de symétrie qui les déterminent ne soient parallèles entre eux.

Corollaire II. Deux polyèdres symétriques de P par rapport à deux plans arbitrairement choisis peuvent toujours être superposés; car ils peuvent tous les deux être superposés à un polyèdre inverse de P.

Théorème V. *Dans deux polyèdres symétriques, les faces homologues sont égales chacune à chacune, etc.* (Le reste comme au théorème II.)

C'est la proposition II du liv. 6 de Legendre; elle devient évidente, puisque le symétrique est toujours susceptible de coïncider avec l'inverse, et que l'inverse jouit, par rapport au polyèdre primitif, des propriétés ici énoncées, en vertu de notre théorème II.

Du reste, la démonstration de ce théorème est rendue inutile.

Théorème VI. *Deux angles solides opposés par le sommet sont inverses l'un de l'autre.*

En effet, le sommet commun est leur pôle de symétrie.

Théorème VII. *Le plan qui passe par deux arêtes opposées d'un parallélipipède, le divise en deux prismes inverses, et les angles solides opposés sont inverses l'un de l'autre.*

On démontre d'abord que les diagonales se coupent au même point; ce point est donc le centre de symétrie du parallélipipède.

Si l'on considère alors les deux prismes comme deux polyèdres distincts, le centre de symétrie devient un pôle de symétrie; donc les angles solides opposés sont inverses ainsi que les deux prismes. (Propositions V et VI du liv. 6 de la *Géométrie* de Legendre.)

Théorème VIII. *Sur la sphère, chaque polygone sphérique* P *a son inverse p, dont les sommets sont diamétralement opposés à ceux du polygone donné. Si l'on fait tourner p de* 180 *degrés autour d'un diamètre de la sphère, le nouveau polygone sera symétrique du polygone* P *par rapport au plan du grand cercle normal au diamètre choisi pour axe de rotation.*

Cela résulte de ce que le centre de la sphère est pris pour pôle de symétrie.

Réciproquement, tout polygone symétrique du polygone sphérique P peut être amené à coïncider avec son inverse p, par une demi-révolution autour du diamètre normal au plan de symétrie.

MÉMOIRE

SUR LES POLYÈDRES DE FORME SYMÉTRIQUE;

PAR M. A. BRAVAIS,
Professeur à l'École Polytechnique.

Dans les recherches que nous allons faire sur les polyèdres, nous ferons abstraction de leurs faces et de leurs arêtes pour ne considérer que leurs sommets, de sorte que tout polyèdre sera pour nous une agrégation de points distincts, de nombre limité, et distribués d'une certaine manière autour de leur centre de gravité.

Définition I. Je nommerai *centre de symétrie* d'un polyèdre, un point C, *fig.* 1, *Pl. I*, tel, qu'en le joignant à un sommet quelconque S du polyèdre, et prolongeant CS d'une quantité égale à elle-même, le point *s* ainsi obtenu soit aussi un sommet du polyèdre; ce point *s* sera l'*homologue* de S par rapport au centre C.

THÉORÈME I. *Dans tout polyèdre limité, il ne peut exister qu'un centre de symétrie.*

Cette proposition est évidente.

Définition II. Je nommerai *axe de symétrie* d'un polyèdre, une droite AB, *fig.* 1, telle, qu'en faisant tourner le polyèdre d'un angle Q autour de AB, les nouveaux lieux des sommets coïncident avec les anciens. Si, par exemple, cette rotation amène le sommet S en S'. S' devra aussi être le lieu d'un sommet du polyèdre, et alors S, S' seront dits *homologues l'un de l'autre*, par rapport à l'axe AB.

THÉORÈME II. *L'angle qui restitue les lieux des sommets d'un polyèdre, dans sa rotation autour d'un axe de symétrie, est toujours commensurable avec* 360 *degrés.*

En effet, soit S', *fig.* 1, un homologue de S par rapport à l'axe AB par S, S' menez un plan normal à AB, et qui coupera cet axe en *c*;

de c, avec le rayon cS, décrivez une circonférence de cercle, sur laquelle vous prendrez

$$\text{arc } S''S' = \text{arc } SS', \quad \text{arc } S'''S'' = \text{arc } SS', \text{ etc.}$$

Pendant que la rotation entraînera S de S en S', le sommet S', participant à ce mouvement, viendra en S'' qui devra être aussi le lieu d'un sommet; ainsi, non-seulement S, S' seront des sommets du polyèdre, mais il en sera de même de S'', et des autres points S'''.... obtenus par la même voie. En répétant ainsi l'arc SS', on doit, après un ou plusieurs tours, revenir au point de départ S; sans cela le nombre des sommets serait illimité, ce qui ne peut être. Donc on aura, en nommant K l'angle SCS', p et q deux nombres entiers, premiers entre eux,

$$K = \frac{p}{q} 360^\circ.$$

Corollaire. Le plus petit des angles de rotation capables de restituer les lieux des sommets est $\frac{360^\circ}{q}$. En effet, l'expression générale de ces angles est

$$mK - n.360^\circ = \frac{mp - nq}{q} 360^\circ,$$

m et n étant des nombres entiers; or on peut toujours déterminer m et n d'après la condition

$$mp - nq = \pm 1;$$

donc, etc.

Définition III. On peut donc définir l'*axe de symétrie* une droite telle, qu'en faisant tourner le polyèdre autour d'elle, d'une partie aliquote $\frac{1}{q}$ de 360 degrés, la position apparente des sommets du polyèdre ne soit point troublée.

Le dénominateur q sera appelé le *numéro d'ordre de la symétrie de l'axe*. Si l'on a $q = 2$, l'axe sera dit *axe de symétrie du deuxième ordre*, ou *axe de symétrie binaire*, ou, plus simplement, *axe binaire*. Si l'on a $q = 3, 4, \ldots$, l'axe sera dit *ternaire, quaternaire,....* Dans ces divers cas, il y aura restitution des lieux des sommets après $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}, \cdots$ de tour.

Définition IV. Je nommerai *plan de symétrie* du polyèdre un plan PQ, *fig.* 1, tel, qu'en abaissant d'un sommet quelconque S une perpendiculaire Sp sur ce plan, et la prolongeant d'une quantité égale à elle-même, l'extrémité Σ ainsi obtenue soit aussi un sommet du polyèdre. Les sommets S, Σ seront *homologues* par rapport au plan PQ.

Définition V. Nous pouvons maintenant définir un *polyèdre de forme symétrique*, ou, plus simplement, un *polyèdre symétrique*, celui qui possédera, soit un centre de symétrie, soit un ou plusieurs axes de symétrie, soit un ou plusieurs plans de symétrie. Le polyèdre qui ne possédera ni centre, ni axes, ni plans de symétrie, sera dit *asymétrique*.

Le terme de polyèdre symétrique est pris ici dans un sens plus étendu que celui qu'on a coutume de lui donner dans la géométrie élémentaire, où l'on appelle polyèdres symétriques deux polyèdres distincts disposés symétriquement par rapport à un plan; mais, pour nous, un polyèdre sera dit symétrique lorsqu'il satisfera aux conditions énoncées ci-dessus.

Théorème III. *S'il existe deux ou plusieurs axes de symétrie, ces axes, et les plans de symétrie que le polyèdre pourrait posséder, doivent tous se couper en un même point.*

Car le centre de gravité des sommets du polyèdre, supposés également pesants, devra évidemment, par la construction connue des centres de gravité, se trouver sur chacun des axes de symétrie, et aussi sur tous les plans de symétrie du polyèdre.

Définition VI. Le point de mutuelle rencontre des axes et plans de symétrie du polyèdre sera nommé *centre de figure* du polyèdre. Lorsqu'il existe un seul axe de symétrie, lorsque tous les plans de symétrie passent par cet axe, et qu'il n'y a pas de centre de symétrie, il n'y a pas non plus de centre de figure.

Le centre d'un tétraèdre régulier est un centre de figure, mais non de symétrie, pour ce polyèdre.

Définition VII. Deux axes de symétrie de même ordre sont dits *axes de même espèce* lorsque la configuration des sommets autour de l'un est la même qu'autour de l'autre. Pour constater cette similitude de configuration, on lie par la pensée les sommets du polyèdre à chacun

des deux axes, et l'un de ces deux systèmes est supposé mobile. Alors, si l'on peut faire coïncider en même temps l'axe mobile avec l'axe fixe, les sommets mobiles avec les sommets fixes, les axes sont dits *de même espèce* et *directement semblables*. Si les polyèdres ne peuvent se superposer pendant que les axes coïncident, s'ils sont simplement homologues par rapport à un certain plan de symétrie, c'est-à-dire symétriques l'un de l'autre, dans le sens adopté par LEGENDRE (*Éléments de Géométrie*), les axes seront encore *de même espèce;* mais ils seront dits *inversement semblables*.

Deux plans de symétrie sont *de même espèce* et *directement semblables* lorsqu'en faisant tourner l'un d'eux autour de leur commune intersection, et permettant au polyèdre de participer à ce mouvement, la coïncidence avec l'autre plan de symétrie entraîne la restitution des lieux des sommets. Mais lorsque l'égalité par symétrie des géomètres remplace l'égalité par coïncidence, les plans de symétrie sont dits *de même espèce*, mais *inversement semblables*.

Lorsque ces deux genres de similitude font défaut, les axes ou plans de symétrie sont dits *d'espèces différentes*.

Deux axes de même espèce sont nécessairement de même ordre; mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie.

Définition VIII. Je nomme *axe principal* un axe de symétrie auquel tous les autres axes, s'il en existe, sont perpendiculaires, et auquel tous les plans de symétrie, s'il en existe, sont parallèles ou normaux, pourvu d'ailleurs que l'ordre de la symétrie de cet axe principal ne soit pas inférieur à celui de la symétrie des autres axes.

Lorsqu'il existe deux ou plusieurs axes satisfaisant à ces conditions, l'un d'eux peut être choisi arbitrairement, et considéré comme axe principal du polyèdre.

Notations. Pour représenter symboliquement les diverses sortes de symétrie que les polyèdres peuvent comporter, j'emploierai la lettre C comme désignant un centre de symétrie; oC indiquera que le polyèdre est privé d'un tel centre.

Les lettres A, L, L′ désigneront des axes de symétrie; A^2, L^2, L'^2 des axes binaires, A^3, L^3,... des axes ternaires, et ainsi de suite, l'indice supérieur indiquant le numéro d'ordre de la symétrie.

La lettre A s'appliquera toujours à l'axe principal.

Ces notations suffisent pour les axes, attendu qu'il ne peut jamais en exister plus de trois espèces différentes dans un polyèdre.

Le nombre des axes de même espèce sera indiqué par le coefficient qui précède la lettre symbole de ces axes : ainsi la notation $[A^6, 3L^2, 3L'^2]$ indiquera un axe principal sénaire combiné avec trois axes binaires d'une certaine espèce, et trois autres axes binaires d'une autre espèce.

Les plans de symétrie seront désignés par les lettres Π, P, P'; on affectera la lettre Π au plan de symétrie normal à l'axe principal A, les symboles P et P' aux plans de symétrie qui ne sont normaux à aucun axe du polyèdre, et les symboles P^q, P'^q, $P^{q'}$ aux plans de symétrie normaux aux axes L^q, L'^q, $L^{q'}$ de ce polyèdre. Le nombre maximum d'espèces de ces plans ne dépasse jamais trois.

Le nombre des plans de symétrie de même espèce sera représenté, comme pour les axes, par le coefficient qui précède le symbole de ces plans ; ainsi $[\Pi, 3P^2, 3P'^2]$ signifiera un plan de symétrie normal à l'axe principal, trois plans de symétrie de même espèce normaux aux axes $3L^2$, et trois plans de symétrie d'une autre espèce normaux aux axes $3L'^2$.

Définition IX *et divisions.* Au point de vue de leur symétrie, les polyèdres peuvent se partager en quatre grandes classes :

1°. Polyèdres asymétriques ;

2°. Polyèdres symétriques dépourvus d'axes ;

3°. Polyèdres symétriques a axe principal ; cette classe se divise en deux, *polyèdres à axe principal d'ordre pair* et *polyèdres à axe principal d'ordre impair ;*

4°. Polyèdres symétriques sphéroïdriques, lesquels possèdent un ou plusieurs axes, dont aucun n'est un axe principal : ils se divisent en deux groupes, les *polyèdres quaterternaires* et les *polyèdres décemternaires,* selon le nombre des axes ternaires qui leur sont propres.

§ I. — Polyèdres asymétriques.

Puisque ces polyèdres n'ont ni axes, ni centre, ni plans de symé-

trie, ils peuvent, conformément aux conventions précédentes, être représentés par le symbole

$$[oL, oC, oP].$$

§ II. — Polyèdres symétriques dépourvus d'axes.

Théorème IV. *Dans tout polyèdre possédant un plan de symétrie et un centre de symétrie, la droite menée par ce centre normalement au plan est un axe de symétrie d'ordre pair.*

Soient PQ, *fig.* 2, le plan de symétrie, C le centre, S un sommet quelconque du polyèdre, CaA la normale au plan. Par cette droite et S menez le plan ACS normal à PQ, et contenant le sommet s homologue de S par rapport au centre C, ainsi que le sommet S′ homologue de s par rapport au plan PQ. Si l'on joint S et S′, il est visible que la droite de jonction sera perpendiculaire sur CA, et que l'on aura aS′ = aS. Donc la condition pour que l'axe AC soit un axe binaire sera satisfaite. L'axe AC pourrait aussi être un axe quaternaire, sénaire, et, en général, un axe d'ordre $2q$. Donc, etc.

Théorème V. *Lorsqu'il existe deux plans de symétrie dans un polyèdre, leur intersection est un axe de symétrie.*

Soit S, *fig.* 3, un sommet quelconque du polyèdre; prenez pour plan de la figure le plan mené par S normalement aux deux plans de symétrie donnés; soient CP, Cp les traces de ces plans sur le plan de la figure. On obtiendra l'homologue s de S par rapport au plan CP, en faisant, dans le plan PCp,

$$\text{angle SC}s = 2\,\text{angle SCP} = 2\,\text{angle }s\text{CP}, \quad \text{C}s = \text{CS};$$

de même, on aura l'homologue S′ de s par rapport au plan Cp, en faisant

$$\text{angle S}'\text{C}s = 2\,\text{angle }s\text{C}p, \quad \text{CS}' = \text{C}s;$$

d'où, par soustraction,

$$\text{S}'\text{CS} = 2\,\text{PC}p, \quad \text{CS}' = \text{CS}.$$

En répétant sur le sommet S′ la construction faite sur S, on arrivera

de même à un autre homologue S″, pareillement déterminé par les équations polaires

$$S''CS' = 2\,PCp, \quad CS'' = CS'.$$

Si donc de C, avec un rayon CS, on décrit la circonférence SS′S″, et si l'on porte un certain nombre de fois l'arc SS′ sur cette circonférence, les points S, S′, S″, etc., formant un système nécessairement limité, seront les sommets d'un polygone régulier inscrit à ce cercle. Si q est le nombre de ces sommets, on voit qu'à chaque point S correspondent $q - 1$ autres points homologues de S par rapport à la normale au plan : cette normale sera donc un axe de symétrie dont le numéro d'ordre q dépendra de la valeur de l'angle PCp.

Corollaire. L'angle SCS′ est nécessairement de la forme

$$\frac{p}{q}\,360^\circ,$$

p, q étant des nombres entiers premiers entre eux, et, dans le cas où S, S′ sont deux homologues aussi voisins que possible, on a

$$SCS' = \frac{360^\circ}{q},$$

d'après le corollaire du théorème II.

Théorème VI. *Les polyèdres symétriques dépourvus d'axes n'ont que deux modes distincts de symétrie, selon qu'ils possèdent un centre ou un plan de symétrie.*

Car ils ne peuvent posséder à la fois un centre et un plan de symétrie, en vertu du théorème IV, ni deux plans de symétrie, en vertu du théorème V. Les symboles de ces deux modes de symétrie seront donc

$$[0L,\ C,\ 0P],$$
$$[0L,\ 0C,\ P].$$

§ III. — Polyèdres symétriques a axe principal.

Théorème VII. *Lorsqu'un polyèdre possède deux plans de symétrie* P, p, *non perpendiculaires entre eux, il en possède un troisième* P′

qui est l'homologue de P *par rapport au plan* p, *et de même espèce que* P.

Soient CP, Cp, *fig.* 3, les traces des deux plans P, p sur un plan normal à leur commune intersection, et soit s' un sommet situé sur ce dernier plan. Soit, de plus, CP′ la trace du plan P′ homologue de P par rapport au plan intermédiaire Cp. Le sommet s' aura un homologue en S par rapport à Cp, et S un homologue en s de l'autre côté de CP : de même, s aura un homologue en S′ par rapport au plan Cp; il est facile de voir que S′ sera l'homologue de s' par rapport au plan CP′ : ainsi à chaque sommet correspond un autre sommet qui est son homologue par rapport à ce dernier plan; donc P′ est aussi un plan de symétrie, et l'on voit qu'il est de même espèce que P.

Théorème VIII. *Lorsqu'un polyèdre possède un plan de symétrie* P, *et un axe de symétrie* L *oblique à ce plan, la droite* L′ *homologue de* L *par rapport au plan est aussi un axe de symétrie.*

Car soit S, *fig.* 4, un sommet quelconque, ayant un homologue en s par rapport au plan P, et soient s, s', s'', etc., le système des homologues de s par rapport à l'axe L; soient S, S′, S″, etc., les homologues de s, s', s'', etc., par rapport au plan P. La configuration de S, S′, S″, etc., autour de L′ sera la même que celle de s, s', s'', etc., autour de L; donc L′ est aussi un axe de symétrie, et de même espèce que L.

Corollaire. Tout plan de symétrie entraîne la reproduction sur le côté opposé de ce plan, non-seulement de chaque sommet, mais aussi de chaque plan ou axe de symétrie du polyèdre. Les plans et axes ainsi reproduits sont de même espèce que les primitifs, et inversement semblables à ces derniers.

Théorème IX. *Dans tout polyèdre possédant un axe* L *d'ordre* q, *a tout plan de symétrie oblique à l'axe correspondent* $q-1$ *autres plans de symétrie de même espèce.*

Ce théorème se démontrerait comme les théorèmes VII et VIII.

On peut aussi se borner à remarquer que, pendant la rotation du polyèdre autour de l'axe L^q, le plan de symétrie peut être considéré comme participant à cette rotation; or, pendant qu'elle s'effectue, ce plan ne cesse pas d'être un plan de symétrie par rapport au

polyedre qui participe à son mouvement; il en sera donc encore de même lorsque la rotation aura atteint une valeur angulaire de $\frac{360^\circ}{q}$.

THÉORÈME X. *Dans tout polyèdre possédant un axe* L *d'ordre* q, *à tout axe de symétrie* L′ *oblique sur le précédent correspondent* $q-1$ *autres axes de même ordre et de même espèce que l'axe* L′.

Ce théorème se démontre comme le précédent; lorsque le polyedre tourne de $\frac{360^\circ}{q}$ autour de L^q, l'axe L′ ne cesse pas d'être un axe de symétrie du polyèdre mobile.

Corollaire. Tout axe de symétrie d'ordre q nécessite la coexistence de tous les axes ou plans de symétrie qui sont les homologues d'un axe ou d'un plan donné, par rapport à l'axe d'ordre q. Les plans ou axes homologues ainsi obtenus sont de même espèce et directement semblables entre eux.

THÉORÈME XI. *Lorsqu'il existe un nombre total* q *de plans de symétrie se coupant suivant une même droite, cette droite est un axe de symétrie dont le numéro d'ordre est* q *ou un de ses multiples.*

Les angles dièdres de ces plans sont nécessairement égaux entre eux; sans cela ces plans se reproduiraient symétriquement l'un par rapport à l'autre (théorème VII), et leur nombre total serait supérieur à q.

Soient donc CPA et CpA, *fig.* 5, deux plans de symétrie voisins; on aura évidemment

$$PCp = \frac{180^\circ}{q}.$$

Or, le point σ étant l'homologue de S par rapport au plan PCA, et S′ l'homologue de σ par rapport au plan pCA, la rotation qui amenera S en S′, en faisant tourner le polyèdre autour de CA, sera, d'après la démonstration du théorème V,

$$PCP' = 2\,PCp = \frac{360^\circ}{q}.$$

Donc l'ordre de symétrie de l'axe CA sera q, ou l'un de ses multiples.

THÉORÈME XII. *Lorsqu'il existe deux axes de symétrie binaires, la normale à leur plan, menée par leur point d'intersection, est un axe de symétrie du polyèdre.*

Soient CP, Cp, *fig.* 3, les deux axes binaires, et S un sommet du polyèdre ; je supposerai que S soit situé à une hauteur Δ au-dessus du plan PCp qui est le plan de la figure, et qu'il se projette orthogonalement en S : l'homologue de S par rapport à l'axe CP sera le point s situé à une distance Δ au-dessous du plan de la figure, et l'on aura, entre les projections S et s, les relations

$$\text{angle SC}s = 2\,\text{angle SCP}, \quad \text{C}s = \text{CS};$$

de même on obtiendra l'homologue S′ de s par rapport à l'axe Cp, en posant

$$\text{angle S}'\text{C}s = 2\,\text{angle }s\text{CP}, \quad \text{CS}' = \text{C}s,$$

et le point S′ sera à une hauteur Δ au-dessus du plan de la figure ; donc

$$\text{S}'\text{CS} = 2\,\text{PC}p, \quad \text{CS}' = \text{CS}.$$

En répétant les mêmes opérations sur S′, on atteindra de même S″, puis S‴ ; tous ces points formeront les sommets d'un polygone régulier inscrit au cercle de rayon CS, et seront les homologues de S par rapport à la normale au plan. Donc cette normale sera un axe de symétrie dont le numéro d'ordre q dépendra de la valeur de l'angle PCp.

Théorème XIII. *Lorsqu'il existe un nombre total q d'axes binaires répartis sur un plan, la normale au plan est un axe de symétrie dont le numéro d'ordre est q ou un multiple de q.*

Les angles de ces axes sont nécessairement égaux entre eux ; sans cela, ces axes se reproduiraient l'un l'autre, dans le même plan (théorème X, *corollaire*), et leur nombre total serait supérieur au nombre q.

Soient donc CP, Cp deux axes binaires voisins, *fig.* 5, et CA la normale à leur plan : on aura évidemment

$$\text{PC}p = \frac{180^\circ}{q}.$$

Or, si s est l'homologue de S par rapport à l'axe CP, et S′ l'homologue de s par rapport à l'axe Cp, la rotation qui amènera S en S′, en faisant tourner le polyèdre autour de CA, sera, d'après la démonstra-

tion du théorème précédent,

$$\text{angle } PCP' = 2\,PCp = \frac{360^\circ}{q};$$

donc la droite CA sera un axe de symétrie d'ordre égal à q ou à un multiple de q.

Théorème XIV. *Lorsqu'il existe trois axes quaternaires rectangulaires entre eux, il existe en même temps quatre axes ternaires extérieurs aux plans qui joignent deux à deux les axes quaternaires.*

Soient OA, OB, OC, *fig.* 6, les trois axes quaternaires se coupant au centre de figure O du polyèdre. Faisons faire au polyèdre un quart de tour autour de OA et de B vers C; le lieu apparent des sommets restera le même, et l'axe OB viendra en OC. Faisons faire au polyèdre un second quart de tour, autour de la verticale OC, de A vers B; le lieu apparent des sommets restera encore le même; l'axe OB restera en OC, et l'axe OA viendra en OB. Le résultat de cette double rotation sera donc de transporter le système des axes OA, OB, fixes avec le polyèdre et mobiles avec lui, sur le système des droites fixes OB, OC. Or il est visible que ce transport équivaut à une rotation unique de 120 degrés autour de la droite OD qui joint le centre de figure O au centre D du triangle sphérique trirectangle ABC. D'où l'on voit que la ligne OD est un axe ternaire du polyèdre, et comme il existe huit triangles trirectangles à centres opposés deux à deux, ces axes ternaires seront au nombre de quatre, tous extérieurs aux plans AOB, AOC, BOC.

Corollaire. Un polyèdre à trois axes quaternaires rectangulaires ne possède pas d'axe principal; car, dans tout polyèdre pourvu d'un axe principal, si l'on prend trois axes quelconques L, L', L'' non situés dans le même plan, deux au moins des trois angles qu'ils comprennent doivent, d'après la définition de l'axe principal, être égaux à 90 degrés. Or, cette condition n'est pas satisfaite par le système des trois axes OA, OB, OD.

Théorème XV. *Dans tout polyèdre possédant un axe principal A^q, s'il existe un second axe de symétrie, cet axe, nécessairement situé dans un plan normal à A^q, aura une symétrie simplement binaire.*

Soient CA, *fig.* 7, l'axe A^q, et CL le second axe, x étant le numéro d'ordre inconnu de sa symétrie; il est clair que cet axe sera situé dans un plan normal à A^q, et je dis, de plus, que l'on aura $x = 2$.

En effet, d'après la définition de l'axe principal, les axes homologues de A^q par rapport à L^x (théorème X, *corollaire*) doivent être normaux à A^q, ou coïncider avec lui. Ainsi, on ne peut faire que les suppositions $x = 2$, $x = 4$, correspondant, la première au cas d'un demi-tour autour de L^x, la deuxième au cas d'un quart de tour.

Si $x = 4$, l'axe CL sera quaternaire, et l'axe CA se reproduira en CL′, qui sera un axe de même espèce que lui (théorème X), et situé dans le plan normal à CA, passant par C; CL′ sera donc aussi un axe d'ordre q, et pour que les axes homologues de l'axe CL par rapport à CL′ ne sortent pas du plan LCL′, comme l'exige la définition de l'axe principal, il faudra que l'on ait $q = 4$ ou $q = 2$.

Le cas $q = 4$ correspond au cas de trois axes quaternaires rectangulaires, et doit être rejeté; car il n'y a pas alors d'axe principal (théorème XIV, *corollaire*).

Dans le cas $q = 2$, l'axe CL sera le véritable axe principal. En effet, il est facile de voir qu'il ne peut y avoir de plan de symétrie passant par CA et oblique à CL; car son premier homologue par rapport à l'axe quaternaire CL ne serait ni normal ni parallèle à CA, et cela serait contraire à la supposition que CA est un axe principal : donc rien ne s'oppose à ce que l'on considère CL comme axe principal, et l'on doit le faire, puisque l'ordre de sa symétrie est plus élevé que l'ordre de la symétrie de CA. Donc, si CA est réellement un axe principal, on ne peut jamais avoir $x = 4$.

Il ne reste que la supposition $x = 2$; donc le deuxième axe de symétrie sera un axe simplement binaire.

Théorème XVI. *Dans tout polyèdre à axe principal, les q axes binaires situés dans le plan normal à cet axe sont également inclinés, chacun sur son voisin, et sont de même espèce de deux en deux.*

Car soient CP, Cp, *fig.* 3, deux axes binaires voisins; l'axe binaire Cp forcera l'axe CP à se reproduire du côté opposé en CP′ (théorème X, *corollaire*); CP′ entraîne à son tour l'existence de l'axe Cp′.

et ainsi de suite : d'où l'on voit que les q angles PCp, pCP', $P'Cp'$, etc., doivent être égaux entre eux et à $\frac{180°}{q}$.

Les axes CP et CP′ sont de même espèce et directement semblables par rapport à l'axe intermédiaire Cp; de même Cp et Cp' sont de même espèce entre eux et directement semblables par rapport à l'axe CP′; donc, etc.

Théorème XVII. *Les polyèdres qui possèdent un axe* A^q, q *plans de symétrie passant par cet axe, et le plan de symétrie* Π *normal à l'axe principal, possèdent aussi* q *axes binaires, aux intersections de ces* q *plans avec le plan* Π.

La rencontre de deux plans de symétrie est toujours un axe de symétrie (théorème V); or, cet axe ne peut être que binaire (théorème XV); donc, etc.

On peut aussi, pour démontrer ce théorème, recourir à la *fig.* 5, où CPQ est l'un des q plans passant par l'axe A^q, et CPP′ le plan Π.

Soit Σ l'homologue du sommet S par rapport au plan Π; soit s l'homologue de Σ par rapport au plan CPQ : il est visible que S et s sont homologues l'un de l'autre par rapport à CP, qui est ainsi un axe binaire du polyèdre.

Théorème XVIII. *Les polyèdres qui ont un axe* A^q, q *axes binaires normaux à* A^q, *et le plan de symétrie* Π *normal à* A^q, *ont aussi* q *plans de symétrie passant par l'axe* A^q *et par chacun des axes binaires.*

Soit CP, *fig.* 5, l'un des axes binaires; soit CPP′ le plan Π normal à l'axe principal CA. Le sommet S aura un homologue en s, de l'autre côté de l'axe binaire CP; le sommet s aura un homologue en σ, de l'autre côté du plan Π : les points S et σ seront homologues l'un de l'autre par rapport au plan CPQ; donc ce dernier plan sera l'un des plans de symétrie du polyèdre.

Théorème XIX. *Les polyèdres qui possèdent un axe principal* A^q, q *plans de symétrie passant par cet axe, et un centre de symétrie, possèdent aussi* q *axes binaires menés par le centre normalement à chacun de ces plans.*

C'est une conséquence des théorèmes IV et XV.

Théorème XX. *Les polyèdres qui possèdent un axe* A^q, q *axes*

binaires normaux à A^q, *et un centre de symétrie, possèdent aussi* q *plans de symétrie normaux à ces axes binaires.*

Cela résulte du théorème XXI que nous allons démontrer.

Cas des polyèdres à axe principal d'ordre pair.

Théorème XXI. *Tout polyèdre possédant un axe d'ordre pair et un centre de symétrie, possède un plan de symétrie passant par le centre et normal à cet axe.*

Soit CA, *fig.* 2, l'axe de symétrie d'ordre $2q$; soient C le centre de symétrie, et PQ le plan normal à CA. Le sommet S a $2q-1$ homologues par rapport à l'axe CA; si donc l'on abaisse la normale Sa sur CA, et si on la prolonge de $aS' = aS$, S' sera l'un de ces homologues. Joignant S' au centre C, prolongeant et faisant $c\Sigma = cS'$, on obtient le sommet Σ homologue de S' par rapport au centre C: évidemment S et Σ sont homologues par rapport au plan PQ; donc ce plan est un plan de symétrie du polyèdre.

Théorème XXII. *Tout polyèdre possédant un axe d'ordre pair et un plan de symétrie normal à cet axe, possède un centre de symétrie situé à la rencontre de l'axe et du plan.*

Soit S', *fig.* 2, l'homologue opposé au sommet S par rapport à l'axe CA; soit s l'homologue de S' par rapport au plan PQ normal à l'axe CA : les deux sommets S et s seront homologues relativement au point C où l'axe coupe le plan; ce point sera donc un centre de symétrie du polyèdre.

Théorème XXIII. *Tout polyèdre possédant un axe d'ordre pair, et un plan de symétrie passant par cet axe, possède un second plan de symétrie passant par l'axe et normal au plan précédent.*

Soient CA, *fig.* 7, l'axe d'ordre pair, LCA le plan de symétrie donné, S un sommet du polyèdre, S' son homologue de l'autre côté de CA, s' l'homologue de S' par rapport au plan LCA : S et s' seront homologues par rapport au plan ACL' passant par CA et normal au précédent; donc, etc.

Théorème XXIV. *Dans tout polyèdre possédant un axe* L^{2q}, *s'il*

existe des axes binaires normaux à L^{2q}, *leur nombre total est égal à* $2q$, *savoir :* q *axes d'une première espèce, et* q *axes d'une seconde espèce, alternant avec les précédents.*

Soit CP, *fig.* 5, un axe binaire normal à l'axe CA d'ordre $2q$; soit menée, dans le plan PCP′ normal à CA, la droite CP′ faisant avec CP l'angle

$$PCP' = \frac{360^\circ}{2q} = \frac{180^\circ}{q}:$$

la droite CP′ sera un axe binaire de même espece que CP, à cause de la symétrie propre à l'axe CA (théorème X, *corollaire*). Le nombre des axes ainsi obtenus sera égal à q; chacun d'eux peut être considéré comme dérivant de CP par des rotations égales à

$$0^\circ, \quad \frac{180^\circ}{q}, \quad 2\frac{180^\circ}{q}, \ldots, \quad (q-1)\frac{180^\circ}{q}$$

les axes correspondants aux rotations

$$q\frac{180^\circ}{q}, \quad (q+1)\frac{180^\circ}{q}, \ldots, \quad (2q-1)\frac{180^\circ}{q},$$

coïncident avec les précédents.

Si maintenant on partage PCP′ en deux parties égales par la bissectrice Cp, Cp sera aussi un axe binaire. Car soit s l'homologue de S par rapport à CP; soit s' l'homologue de s par rapport à l'axe CA, l'angle de rotation qui amene s en s' étant

$$\frac{360^\circ}{2q} = PCP':$$

les sommets S, s' seront homologues par rapport à Cp considéré comme étant un axe binaire : ces q droites bissectrices seront ainsi des axes binaires, mais d'une autre espèce.

Il y aura donc $2q$ axes binaires, et leur nombre ne peut être plus considérable; car, s'il existait Q axes binaires, Q étant supérieur à $2q$, l'ordre de la symétrie de l'axe normal à leur plan serait Q ou mQ (théoreme XIII), ce qui est contraire aux conditions de l'énoncé.

Corollaire I. Le nombre des axes binaires normaux à un axe principal A^{2q} sera toujours égal à 0 ou à $2q$.

Corollaire II. Les axes binaires normaux à A^{2q} sont perpendiculaires entre eux, deux à deux.

Théorème XXV. *Dans tout polyèdre possédant un axe* L^{2q}, *s'il existe des plans de symétrie passant par cet axe, leur nombre total sera* $2q$, *dont* q *d'une espèce, et* q *d'une autre espèce, alternant avec les précédents.*

Soient ACP, ACP′, *fig.* 5, deux plans de symétrie faisant entre eux l'angle

$$PCP' = \frac{360^\circ}{2q} = \frac{180^\circ}{q}.$$

Le système de ces plans se composera de q plans de symétrie, de même espèce et directement semblables entre eux. De plus, les plans intermédiaires qui partagent en deux parties égales les angles dièdres (ACP, ACP′) sont aussi des plans de symétrie. Car soit ACp un de ces plans intermédiaires; prenez σ homologue d'un sommet donné S par rapport au plan ACP, et soit σ' l'homologue de σ par rapport à CA, l'angle de rotation qui amène σ en σ' étant

$$\frac{360^\circ}{2q} = PCP' :$$

il est clair que S et σ' seront symétriquement placés par rapport au plan ACp : donc ce plan est un plan de symétrie, et il en existe en tout q d'une autre espèce que ACP, et tous directement semblables à ACp.

Il existe donc $2q$ plans de symétrie passant par L^{2q}, et leur nombre ne peut être plus considérable; car s'il était égal à $Q > 2q$, l'ordre de la symétrie de l'axe placé à leur commune rencontre serait Q ou mQ (théorème XI), ce qui ne peut être.

Corollaire I. Le nombre des plans de symétrie passant par un axe principal A^{2q} est toujours 0 ou $2q$, et ne peut être supérieur à ce dernier nombre.

Corollaire II. Ces plans de symétrie sont perpendiculaires deux à deux.

Théorème XXVI. *Les polyèdres à axe principal* A^{2q}, *qui ne possèdent ni plans de symétrie passant par cet axe, ni axes binaires, ont deux modes distincts de symétrie, selon que le plan normal à l'axe principal est ou n'est pas un plan de symétrie.*

Le nombre des axes de symétrie est fixé par l'énoncé du théorème; il en est de même de celui des plans de symétrie, du moment que l'on sait si le plan normal à l'axe principal est ou n'est pas un plan de symétrie. Quant à la présence du centre de symétrie, elle est subordonnée à celle du plan de symétrie normal à l'axe principal (théorèmes XXI et XXII).

Les symboles de ces deux modes de symétrie seront donc

$$[A^{2q},\ oL^2,\ oC,\ oP],$$
$$[A^{2q},\ oL^2,\ C,\ H].$$

Théorème XXVII. *Les polyèdres à axe principal A^{2q}, qui possèdent isolément, soit les $2q$ plans de symétrie, soit les $2q$ axes binaires, compatibles avec cet axe principal, ne peuvent avoir ni plan de symétrie normal à l'axe principal, ni centre de symétrie.*

C'est une conséquence évidente des théorèmes XVII, XVIII, XIX et XX.

Le groupe de polyèdres auquel se rapporte l'énoncé du théorème actuel se décompose en deux classes à symétrie distincte, selon que les plans de symétrie ou les axes binaires font défaut; les axes binaires étant de deux espèces différentes (théorème XXII), nous représenterons ceux d'une première espèce par L^2, ceux d'une deuxième espèce par L'^2. De même pour les plans de symétrie; ceux d'une espèce seront désignés par P, ceux de l'autre espèce par P'. On aura ainsi, pour représenter les deux classes de polyèdres, les symboles

$$[A^{2q},\ qL^2,\ qL'^2,\ oC,\ oP],$$
$$[A^{2q},\ oL^2,\ oC,\ qP,\ qP'].$$

Théorème XXVIII. *Dans les polyèdres possédant l'axe principal A^{2q}, $2q$ axes binaires et $2q$ plans de symétrie passant par l'axe principal, les axes binaires peuvent être situés sur les plans de symétrie, ou bien alterner avec eux, c'est-à-dire coïncider avec les bissectrices de leurs angles dièdres; ce qui donne, pour ce cas particulier, deux modes distincts de symétrie.*

Pour toute autre position relative, les axes binaires, en reprodui-

sant par des rotations de 180 degrés les $2q$ plans de symétrie (théorème X, *corollaire*), feraient doubler le nombre de ces derniers; et, de même, les axes binaires se répétant dans des positions homologues de l'autre côté des plans (théorème VIII, *corollaire*), doubleraient aussi en nombre; ce qui est contraire aux corollaires des théorèmes XXIV et XXV : donc, etc.

THÉORÈME XXIX. *Dans les polyèdres à axe principal* A^{2q}, *lorsque les plans de symétrie contiennent les axes binaires, il existe un plan de symétrie normal à l'axe principal, et un centre de symétrie.*

Soit CA, *fig.* 5, l'axe principal; soient CP l'un des axes binaires, et ACPQ le plan de symétrie qui contient cet axe. Le sommet S aura son homologue en s par rapport à l'axe binaire CP; s aura son homologue en Σ par rapport au plan ACPQ. La disposition relative de S et Σ indique que le plan PCP′, normal à CA et au plan CAP, est un plan de symétrie du polyèdre, par rapport auquel S et Σ sont deux sommets homologues : donc il existera un plan de symétrie normal à A^{2q}, lequel entraîne à son tour l'existence d'un centre de symétrie (théorème XXII).

THÉORÈME XXX. *Dans les polyèdres à axe principal* A^{2q}, *lorsque les plans de symétrie alternent avec les axes binaires, ceux-ci sont tous de même espèce, mais inversement semblables chacun avec son voisin; il n'existe alors ni plan de symétrie normal à l'axe, ni centre de symétrie.*

S'il existait un plan de symétrie normal à l'axe, ses intersections avec les plans de symétrie seraient des axes binaires (théorème XVII), ce qui est contraire à l'énoncé de notre théorème; donc il n'existe ni plan de symétrie normal à l'axe principal, ni centre de symétrie (théorème XXI).

Les axes binaires voisins $L_0 l_0$, $L_1 l_1$, *fig.* 8, sont inversement semblables, comme homologues par rapport au plan de symétrie intermédiaire qui passe par l'axe principal et par $P_0 C p_0$.

La similitude inverse n'exclut pas nécessairement, dans le cas général, la similitude directe; mais, dans le cas présent, il est facile de s'assurer que $L_0 l_0$, $L_1 l_1$ ne peuvent jamais être directement semblables; car la rotation qui amènerait la coïncidence caractéristique de

la similitude directe ne peut évidemment s'effectuer qu'autour de l'axe principal, autour de la bissectrice p_0CP_0, ou enfin autour de la deuxième bissectrice p_3CP_3, normale à la précédente. Comme il existe $2q$ axes binaires, on a

$$L_0CL_1 = \frac{180^\circ}{2q} = \frac{360^\circ}{4q}, \quad P_0CP_1 = \frac{180^\circ}{2q} = \frac{90^\circ}{q}.$$

Si CL_0, CL_1 étaient directement semblables par rapport à l'axe principal, la rotation qui restitue les lieux des sommets étant $\frac{360^\circ}{4q}$, l'ordre de la symétrie de l'axe principal serait $4q$, ce qui ne peut être. De même CL_0, CL_1 ne peuvent être directement semblables par rapport à CP_0, puisque CP_0 n'est point un axe binaire. La normale à CP_0, ou CP_3, n'est pas non plus un axe binaire, puisque l'on a

$$90^\circ = q \times P_0CP_1,$$

et qu'ainsi cette normale est une droite du groupe CP_0, CP_1, CP_2. Donc les axes binaires voisins sont inversement semblables, sans aucune possibilité de superposition.

La *fig.* 8 offre la disposition des sommets homologues pour le cas $2q = 6$. Le plan de symétrie normal à l'axe principal est pris pour plan de la figure. Les ronds noirs indiquent les sommets situés au-dessous de ce plan; les ronds à centre blanc, les sommets situés au-dessus du même plan.

En exprimant les symboles des deux modes de symétrie que nous examinons, il convient de remarquer que, dans le cas du théorème XXIX, les plans de symétrie sont normaux aux axes binaires, et que, dans le cas où les plans alternent avec les axes, ils ne peuvent leur être perpendiculaires. Nous aurons ainsi pour les formules relatives, 1° au cas de la coïncidence, 2° au cas de l'alternance :

$$[A^{2q},\ qL^2,\ qL'^2,\ C,\ \Pi,\ qP^2,\ qP'^2],$$

$$[A^{2q},\ 2qL^2,\ 0C,\ 2qP].$$

On voit, par les théorèmes XXVI, XXVII et XXVIII, que les polyèdres à axe principal d'ordre pair ne peuvent avoir que six modes

de symétrie; on les trouvera indiqués dans le tableau synoptique qui termine ce Mémoire.

Dans ce tableau, on peut donner à q toutes les valeurs possibles, depuis $q = 1$ inclusivement, jusqu'à $q = \infty$.

Cas des polyèdres à axe principal d'ordre impair.

Théorème XXXI. *Un polyèdre possédant un axe principal d'ordre impair ne peut posséder en même temps un plan de symétrie normal à cet axe et un centre de symétrie.*

C'est une conséquence du théorème IV.

Théorème XXXII. *Dans tout polyèdre possédant un axe principal A^{2q+1}, s'il existe d'autres axes, ces axes sont binaires, leur nombre total est égal à $2q+1$, et ils sont tous de même espèce.*

Un quelconque des nouveaux axes, nécessairement binaire et situé dans le plan normal à A^{2q+1} (théorème XV), sera répété $2q$ fois, en vertu du corollaire du théorème X; d'ailleurs ces $2q+1$ axes seront distincts entre eux, et ne se superposeront pas (comme cela arrive pour le cas des axes principaux d'ordre pair). En effet, si on les numérote 0, 1, 2, etc., dans l'ordre où des rotations successives, égales chacune à $\frac{360^\circ}{2q+1}$, les font naître, on trouve que les inclinaisons de 0, 1, 2, 3, etc., sur l'axe 0 sont

$$0^\circ,\quad \frac{360^\circ}{2q+1},\quad \frac{2.360^\circ}{2q+1},\ldots\quad \frac{q.360^\circ}{2q+1},\quad \frac{(q+1)360^\circ}{2q+1},\ldots\quad \frac{2q.360^\circ}{2q+1},$$

et correspondent à des droites distinctes, puisque deux de ces angles ne peuvent jamais différer de 180 degrés.

Il ne peut exister, dans le plan normal à l'axe principal, d'autres axes binaires que ceux dont nous venons de constater la présence. Car, soit Q leur nombre total: si l'on avait $Q > 2q+1$, le numéro d'ordre de la symétrie de l'axe principal serait Q ou mQ (théorème XIII), ce qui est contraire à la supposition d'un axe principal d'ordre $2q+1$.

Corollaire. Le nombre des axes binaires normaux à A^{2q+1} sera toujours 0 ou $2q+1$.

Théorème XXXIII. *Dans tout polyèdre possédant l'axe principal*

A^{2q+1}, s'il existe des plans de symétrie passant par l'axe principal, leur nombre total est $2q+1$, et ils sont tous de même espèce.

On démontrera, comme dans le théorème précédent, 1° que les $2q+1$ plans provenant de rotations successives, toutes égales à $\frac{360°}{2q+1}$, autour de l'axe principal, sont distincts, de même espece, et directement semblables entre eux; 2° que leur nombre ne peut surpasser $2q+1$, à cause du théorème XI.

Corollaire. Le nombre des plans de symétrie passant par l'axe principal A^{2q+1}, sera toujours égal à 0 ou à $2q+1$.

Théorème XXXIV. *Les polyèdres à axe principal A^{2q+1}, qui ne possèdent ni plans de symétrie passant par cet axe, ni axes binaires, offrent trois modes distincts de symétrie, selon qu'ils ont ou n'ont pas un plan de symétrie normal à l'axe, et, dans ce dernier cas, selon qu'ils ont ou n'ont pas un centre de symétrie.*

Si le polyèdre possède un plan de symétrie normal à l'axe principal, il ne peut avoir de centre de symétrie (théorème XXXI); dès lors, l'axe étant un axe principal, la symétrie du polyèdre est complétement fixée.

Si le plan normal à l'axe principal n'est point un plan de symétrie, la même impossibilité n'existe plus. Ainsi, avec nos précédentes notations, nous aurons les trois symboles distincts

$$[A^{2q+1},\ oL^2,\ oC,\ oP],$$
$$[A^{2q+1},\ oL^2,\ C,\ oP].$$
$$[A^{2q+1},\ oL^2,\ oC,\ \Pi],$$

Théorème XXXV. *Les polyèdres à axe principal A^{2q+1}, qui possèdent isolément, soit les $2q+1$ plans de symétrie, soit les $2q+1$ axes binaires, compatibles avec cet axe principal, ne peuvent avoir ni plan de symétrie normal à A^{2q+1}, ni centre de symétrie.*

C'est une conséquence évidente des théorèmes XVII, XVIII, XIX et XX.

En conservant les notations déjà adoptées, on trouve que les deux classes de polyèdres auxquels se rapporte le théorème actuel, sont

représentées par les symboles

$$[A^{2q+1},\ (2q+1)L^2,\ oC,\ oP],$$
$$[A^{2q+1},\ oL^2,\ oC,\ (2q+1)P].$$

Théorème XXXVI. *Dans les polyèdres possédant l'axe principal* A^{2q+1}, $2q+1$ *axes binaires et* $2q+1$ *plans de symétrie passant par l'axe principal, les axes binaires sont situés sur les plans de symétrie, ou bissèquent leurs angles dièdres.*

Ce théorème se démontre exactement comme le théorème XXVIII.

Théorème XXXVII. *Dans les polyèdres à axe principal* A^{2q+1}, *lorsque les plans de symétrie contiennent les axes binaires, il existe un plan de symétrie normal à l'axe principal, mais pas de centre de symétrie.*

La démonstration est celle du théoreme XXIX. Mais la conséquence relative à l'existence du centre de symétrie n'a plus lieu, à cause du théorème XXXI.

Théorème XXXVIII. *Dans les polyèdres à axe principal* A^{2q+1}, *lorsque les plans de symétrie alternent avec les axes binaires, ceux-ci sont tous de même espèce, et coïncident avec les normales aux plans de symétrie; il existe alors un centre de symétrie, mais pas de plan de symétrie normal à l'axe principal.*

Les axes binaires CL_0, CL_1, CL_2, *fig.* 9, partagent alors en $2q+1$ parties égales la demi-circonférence d'un cercle décrit de C comme centre; ce nombre étant impair, l'une des bissectrices des angles L_0CL_1, L_1CL_2, etc., sera normale à CL_0; donc il existera toujours un plan de symétrie normal à l'axe CL_0 : c'est le plan dont la trace est P_1Cp_1 sur le plan de la *fig.* 9, supposé normal à l'axe principal. La coexistence d'un plan de symétrie et d'un axe binaire qui lui est normal entraîne celle du centre de symétrie (théorème XXII).

D'ailleurs, les axes binaires sont tous directement semblables par rapport à l'axe principal, et, par conséquent, de même espece. Les ronds à centre blanc et à centre noir de la *fig.* 9 indiquent la disposition des sommets homologues; les ronds noirs indiquent les sommets situés au-dessous du plan de la figure; ceux à centre blanc, les sommets situés au-dessus de ce plan.

Les symboles des polyèdres auxquels se rapportent les théorèmes XXXVII et XXXVIII, seront donc, d'après les conventions de la page 144,

$$[A^{2q+1}, (2q+1)L^2, C, (2q+1)P^2],$$
$$[A^{2q+1}, (2q+1)L^2, 0C, \Pi, (2q+1)P].$$

On voit, par les théorèmes XXXIV, XXXV et XXXVIII, que les polyèdres à axe principal d'ordre impair ne peuvent avoir que les sept modes de symétrie indiqués dans le tableau qui termine ce Mémoire.

On peut, dans ce tableau, donner à q toutes les valeurs imaginables, depuis $q = 1$ inclusivement, jusqu'à $q = \infty$.

§ IV. — Polyèdres symétriques sphéroïdriques

Théorème XXXIX. *Tout polyèdre sphéroédrique possède au moins deux axes* L^q, $L^{q'}$, *dont les numéros d'ordre sont supérieurs à* 2.

Un polyèdre sphéroédrique (*définition* IX) ne peut posséder un seul axe de symétrie; car alors, afin d'éviter la reproduction de cet axe par les plans de symétrie du polyèdre (théorème VIII, *corollaire*), il faudrait que ces plans continssent l'axe unique de symétrie ou coïncidassent avec son plan normal : cet axe unique pourrait donc toujours être considéré comme étant un axe principal, et le polyèdre ne serait pas sphéroédrique.

Il existe donc deux ou plusieurs axes de symétrie dans les polyèdres sphéroédriques. Soient alors L^q, $L^{q'}$ deux axes dont les numéros d'ordre q, q' ne soient pas inférieurs à ceux des autres axes; je dis que l'on aura $q > 2$, $q' > 2$.

Supposons d'abord que l'on ait $q = 2$, $q' = 2$. La normale au plan des axes L^2, L'^2 sera aussi un axe de symétrie $L^{q''}$ (théorème XI), et puisqu'on ne peut avoir $q'' > q$, $q'' > q'$, on aura $q'' = 2$. D'ailleurs L^2 et L'^2 sont rectangulaires; sans cela il y aurait un troisième axe binaire sur le plan des axes L^2, L'^2, et q'' serait plus grand que 2 (théorème XIII), ce qui ne peut être. On a donc alors trois axes binaires rectangulaires L^2, L'^2, L''^2, et je dis que l'un au moins de ces axes peut être considéré comme étant un axe principal.

En effet, il ne peut alors y avoir dans le polyèdre aucun autre axe

binaire que les trois axes L^2, L'^2, L''^2; car tout axe oblique à L^2, étant combiné avec L^2 ferait naître d'autres axes binaires dans leur plan commun (théorème X, *corollaire*), et un axe de symétrie d'ordre supérieur à 2 (théorème XIII).

De même, tout plan de symétrie doit passer par l'un des trois axes, tel que L^2 : sans cela, il se produirait trois autres axes binaires homologues par rapport à ce plan, et le nombre total des axes binaires serait six, ce que nous venons de prouver ne pas être possible. Soit donc P un plan de symétrie passant par L^2. S'il existe un second plan de symétrie P′, il doit être perpendiculaire à P; sans cela, leur intersection serait un axe d'ordre supérieur à 2 (théorème XI). Voyons donc si la disposition de ces plans peut être telle, que le polyèdre n'ait pas d'axe principal.

Si le plan P ne passe ni par L'^2, ni par L''^2, P′ devra passer par L^2; sans cela son intersection avec P formerait un quatrième axe binaire, ce qui est impossible; et il en serait de même de tous les autres plans P″, P‴, qui tous passeraient nécessairement par L^2. Ainsi, dans ce cas, l'axe L^2 satisferait aux conditions exigées pour les axes principaux, et le polyèdre ne serait pas sphéroédrique.

Si, au contraire, le plan P contient non-seulement L^2, mais encore l'un des deux axes binaires L'^2, L''^2, si, par exemple, il contient l'axe L'^2, le plan P′, qui doit toujours passer par la normale au plan P, c'est-à-dire par L''^2, devra, pour que son intersection avec P ne forme pas un quatrième axe binaire, contenir l'axe L^2 ou l'axe L'^2, par exemple l'axe L^2. S'il existe alors un troisième plan P″, il devra être perpendiculaire à la fois à P et à P′ (*voyez* ci-dessus); il passera donc par L'^2 et L''^2, et il ne pourra exister d'autre plan de symétrie. Dans ce cas, l'un quelconque des axes L^2, L'^2, L''^2 peut être considéré comme étant un axe principal, et le polyèdre n'est pas sphéroédrique.

Donc on ne peut avoir $q = 2$, $q' = 2$.

Supposons maintenant que l'on ait $q > 2$, $q' = 2$. Les deux axes L^q, L'^2 seront rectangulaires entre eux; sans cela, l'axe L'^2 forcerait l'axe L^q à se reproduire, au moins une fois, et le nombre q' serait inférieur au numéro d'ordre de deux des axes du polyèdre, ce qui n'est pas possible, d'après les hypothèses précédemment faites. Par la même raison, il ne pourra exister aucun axe en dehors du plan normal à L^q.

Ainsi la première condition pour que L^q soit un axe principal est satisfaite.

De même, les plans de symétrie du polyèdre, étant assujettis à ne pouvoir reproduire l'axe L^q, devront nécessairement contenir L^q ou lui être perpendiculaires; donc L^q sera un axe principal, et le polyèdre ne sera point sphéroédrique.

Donc on ne peut avoir

$$q > 2, \quad q' = 2.$$

Donc enfin, on aura

$$q > 2, \quad q' > 2.$$

Théorème XL. *Lorsqu'il existe dans un polyèdre deux axes d'ordre supérieur au deuxième, le polyèdre est nécessairement sphéroédrique.*

Car si le polyèdre possédait un axe principal, les autres axes seraient nécessairement binaires (théorème XV), ce qui est contraire à l'énoncé. Donc le polyèdre sera sphéroédrique.

Définition X. Les théorèmes XXXIX et XL nous indiquent que l'on peut donner une définition des polyèdres sphéroédriques différente de celle de la page 145, et dire que ces polyèdres sont des « polyèdres symétriques à plusieurs axes, dont deux au moins ont » une symétrie d'un ordre supérieur au deuxième. » Les polyèdres à axe principal peuvent alors se définir comme étant « des polyèdres » pourvus d'un ou plusieurs axes de symétrie, dont un au plus est » d'un ordre supérieur au deuxième. »

Théorème XLI. *Dans tout polyèdre sphéroédrique, possédant un axe de symétrie L^q d'ordre supérieur au deuxième, le nombre total Q des axes d'ordre q appartenant à ce polyèdre est nécessairement égal à la moitié de l'une des valeurs que peut avoir le nombre des sommets d'un polyèdre régulier auxiliaire satisfaisant aux deux conditions suivantes : 1° que son centre de figure soit aussi un centre de sa symétrie; 2° que chacun de ses angles solides soit formé de q angles plans.*

L'axe L^q est nécessairement associé à un axe $L^{q'}$, q' étant plus grand que 2 (théorème XXXIX); or en faisant tourner L^q autour de $L^{q'}$ d'un angle égal à $\frac{360^\circ}{q'}$, on obtiendra le lieu d'un deuxième axe d'ordre q, distinct de l'axe primitif L^q (théorème X, *corollaire*).

Soient donc OA, OB, *fig.* 10, ces deux axes d'ordre q se coupant en O, qui est le centre de figure du polyèdre. De O comme centre, décrivons la sphère de rayon 1, coupant les deux axes OA, OB en A et B, et menons l'arc de grand cercle AB. On pourra toujours supposer

$$\text{arc AB} < 90^\circ \quad \text{ou} \quad = 90^\circ :$$

dans le cas contraire, on considérerait le supplément de l'angle AOB. De même, on peut toujours supposer que OA et OB sont choisis de manière à ce que leur inclinaison soit la plus petite parmi toutes celles que les axes d'ordre q ont entre eux. Ceci posé, faisons tourner le polyèdre de $\frac{360^\circ}{q}$ autour de l'axe OB d'ordre q. Le point A viendra en C : joignons BC par un arc de grand cercle ; on aura

$$\text{ABC} = \frac{360^\circ}{q},$$

et la droite OC sera aussi un axe d'ordre q (théorème X, *corollaire*). Traçons de même l'arc de grand cercle CD, tel que l'on ait

$$\text{CD} = \text{CB} = \text{AB}, \quad \text{BCD} = \frac{360^\circ}{q}$$

la droite OD sera encore un axe d'ordre q.

Si l'on fait tourner le polyèdre une deuxième fois de $\frac{360^\circ}{q}$ autour de l'axe OC et de B vers D, l'effet de cette seconde rotation sera d'amener le point B en D, le point A restant en C. Les deux rotations équivalent à une rotation unique autour du point M, pôle du petit cercle circonscrit aux points A, B, C, D [*]. La double rotation autour de OB et de OC ne troublant pas les lieux apparents des sommets du polyèdre, la rotation unique autour de M, qui la remplace, ne troublera pas non plus ces lieux apparents ; donc la droite OM sera un axe de symétrie du polyèdre, et l'on voit que si l'on fait tourner le polyèdre autour de OM d'un angle égal à l'angle dièdre AMC, le lieu des sommets n'en sera pas troublé. Donc cet angle est commensurable avec la circonférence (théorème II). Donc le nombre des sommets A, B, C, D, etc., situés sur la circonférence du petit cercle ABCD est limité : donc

[*] Ce pôle M est à la rencontre des arcs de grand cercle BM, CM qui divisent en deux parties égales les angles sphériques ABC, BCD

ces sommets forment un polygone régulier inscrit dont le nombre de côtés pourra être désigné par r. Il sera toujours permis de supposer que A et B sont deux sommets voisins; on pourra donc écrire

$$AMB = \frac{360^\circ}{r},$$

formule dans laquelle le nombre r sera nécessairement plus grand que 2.

Puisque AMB et ABC sont des sous-multiples de 360 degrés, le polygone régulier sphérique ABCDE..., se répétant en CBC'D''..., en A'ABC'D'..., etc., finira par recouvrir la totalité de la surface de la sphère. L'ensemble des points ainsi obtenus y figurera les sommets d'un polyèdre régulier inscrit, et ce polyèdre régulier sera nécessairement l'un de ceux dans lesquels les angles plans s'assemblent en un nombre égal à q, pour former chacun de ses angles solides.

Les cinq polyèdres réguliers de la géométrie ont tous, excepté le tétraèdre régulier, un centre de symétrie en leur centre de figure: mais, dans le tétraèdre inscrit à la sphère, la distance angulaire AB de deux sommets surpasse 90 degrés. Ce cas ne pourra donc pas se présenter, puisqu'il est contraire à notre mode de construction.

Le polyèdre inscrit résultant de la construction précédente sera donc

ou le cube correspondant au cas $q = 3$, $r = 4$; on a alors [*]

$$AB = 70^\circ 32', \quad AM = 54^\circ 44';$$

ou l'octaèdre régulier correspondant au cas $q = 4$, $r = 3$; on a alors

$$AB = 90^\circ, \qquad AM = 54^\circ 44';$$

ou le dodécaèdre régulier correspondant au cas $q = 3$, $r = 5$; alors

$$AB = 41^\circ 49', \quad AM = 37^\circ 23';$$

ou l'icosaèdre régulier correspondant au cas $q = 5$, $r = 3$; alors

$$AB = 63^\circ 26', \quad AM = 37^\circ 23'.$$

(*) Les arcs AB, AM sont donnés par les formules connues,

$$\cos \frac{1}{2} AB = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{q} \cos \frac{\pi}{r}, \quad \cos AM = \cot \frac{\pi}{q} \cot \frac{\pi}{r}.$$

Soit maintenant M le nombre des sommets du polyèdre régulier ainsi obtenu; chaque sommet ayant son homologue, qui lui est diamétralement opposé, on voit que le nombre total Q des axes d'ordre q sera au moins égal à $\frac{1}{2}$M. Je dis, de plus, qu'on ne peut avoir $Q > \frac{1}{2}M$. Car, si l'on avait $Q > \frac{1}{2}M$, l'un des axes d'ordre q viendrait percer la sphère en un point X situé à l'intérieur de l'un des polygones sphériques ABCDE; l'une des distances angulaires de X aux sommets A, B, C, D, serait nécessairement inférieure à AM, et *à fortiori* à AB (d'après le tableau synoptique des valeurs corrélatives de AB et AM), ce qui est contraire à l'hypothèse d'inclinaison minimum des deux axes OA, OB. Donc on ne peut avoir

$$Q > \frac{1}{2}M;$$

donc on aura

$$Q = \frac{1}{2}M.$$

Théorème XLII. *Un polyèdre sphéroédrique ne peut avoir que des axes ternaires, quaternaires ou quinaires, les axes binaires non compris.*

Cela résulte de l'énoncé du théorème précédent; L^q étant l'un des axes du polyèdre, le nombre q ne peut être que le nombre d'angles plans susceptibles de s'associer pour former l'angle solide d'un polyèdre régulier: donc on doit avoir

$$q = 3, \quad \text{ou } 4, \quad \text{ou } 5.$$

Théorème XLIII. *Il existe deux groupes distincts de polyèdres sphéroédriques, ceux qui possèdent quatre axes ternaires, et ceux qui possèdent dix axes ternaires.*

Examinons successivement les quatre cas auxquels conduit la répétition des Q axes L^q les uns par les autres, et soit toujours M le nombre des sommets du polyèdre régulier inscrit auquel conduit ce mode de répétition.

Dans le cas du cube, on a (théorème XLI),

$$q = 3, \quad M = 8, \quad Q = \frac{1}{2}M = 4.$$

Dans le cas de l'octaèdre, on a

$$q = 4, \quad M = 6, \quad Q = \frac{1}{2} M = 3.$$

Les trois axes quaternaires ainsi obtenus sont rectangulaires; donc il existe alors quatre axes ternaires (théorème XIV), et il ne peut en exister un plus grand nombre; car les nouveaux axes ternaires forceraient les axes quaternaires à se répéter, de sorte que l'on aurait $Q > 3$, ce qui est impossible.

Dans le cas du dodécaèdre, on a

$$q = 3, \quad M = 20, \quad Q = \frac{1}{2} M = 10.$$

Dans le cas de l'icosaèdre, on a

$$q = 5, \quad M = 12, \quad Q = \frac{1}{2} M = 6.$$

Soient alors M, M_0, M_1, *fig.* 12, trois sommets voisins d'un icosaèdre inscrit: la normale abaissée du centre de la sphère sur la face MM_0M_1 sera évidemment un axe ternaire, et comme l'icosaèdre a vingt faces parallèles deux à deux, il y aura dix axes ternaires; mais il ne peut y en avoir un plus grand nombre; car, pour $q = 3$, on ne trouve que les deux valeurs $Q = 4$, $Q = 10$ (théorème XLI). Donc, etc.

Corollaire. Nous pouvons donc diviser les polyèdres sphéroédriques en deux groupes: les *quaterternaires* qui ont quatre axes ternaires assemblés comme le sont les quatre grandes diagonales d'un cube, et les *décemternaires* qui possèdent dix axes ternaires assemblés comme le sont les dix grandes diagonales d'un dodécaèdre régulier

Cas des polyèdres quaterternaires.

THÉORÈME XLIV. *Si l'on construit un cube ayant pour diagonales les quatre axes ternaires d'un polyèdre quaterternaire donné, les trois normales abaissées du centre de figure sur les faces de ce cube sont trois axes de même espèce pour le polyèdre, et de symétrie binaire ou quaternaire.*

En prenant pour centre le centre de figure du polyèdre, point de rencontre de ses quatre axes ternaires, et en prenant pour rayon

l'unité, décrivons une sphère qui coupera les extrémités supérieures de nos quatre axes ternaires en A, A_0, A_1, A_2, *fig.* 11. (J'ai projeté stéréographiquement la surface de cette sphère sur le plan du grand cercle dont A est le pôle; mais le lecteur est prié de suivre la démonstration comme si elle était faite sur la sphère : le centre O de celle-ci n'a point été marqué sur la figure.) Le cube inscrit dont A, A_0, A_1, A_2 sont les quatre sommets supérieurs, aura en B_0, B_1, B_2 les sommets diamétralement opposés à A_0, A_1, A_2; $AA_0B_1B_2$, $AA_0B_2A_1$, $AA_1B_0A_2$ sont trois polygones sphériques carrés dont les centres M_0, M_1, M_2 sont les extrémités des trois normales abaissées du centre sur les faces du cube inscrit.

Une double rotation de 120 degrés, savoir : premièrement autour de A_2 comme pôle, de A vers B_0, et secondement autour de B_0 comme pôle, de A_2 vers A_1, amène A en B_0 et A_2 en A_1, sans troubler le lieu des sommets : cette double rotation équivaut à une rotation de 180 degrés autour du pôle M_0. Donc OM_0 est un axe dont la symétrie est 2 ou un multiple de 2. D'ailleurs, la symétrie de OM_0 ne peut être d'ordre supérieur à 4; sans cela, le nombre des axes ternaires situés autour du pôle M_0 surpasserait 4, ce qui est contraire aux conditions initiales : donc les trois axes rectangulaires OM_0, OM_1, OM_2 sont binaires ou quaternaires.

Théorème XLV. *Les polyèdres quaterternaires à axes binaires rectangulaires ne peuvent posséder aucun autre axe binaire.*

S'il existait un autre axe binaire, il ne pourrait percer la partie supérieure de la surface de la sphère, *fig.* 11, qu'en un des trois points qui sont les milieux soit des arcs AA_0, AA_1, AA_2, soit des arcs homologues A_0B_1, A_0B_2, A_1B_2, A_1B_0, A_2B_0, A_2B_1; car, pour toute autre position, cet axe forcerait les axes ternaires à se répéter, ce qui en doublerait le nombre. Supposons que G_0, milieu de AA_0, soit l'extrémité du nouvel axe binaire; alors une double rotation du polyèdre, premierement de 180 degrés autour du pôle G_0, deuxièmement de 120 degrés autour du pôle A_0, dans le sens A vers B_1, amènera

A en A_0, puis en A_0,
A_0 en A, puis en B_1,
B_1 en A_1, puis en A_2,
A_2 en B_2, puis en A.

Ce double mouvement, qui ne trouble pas les lieux des sommets du polyèdre, équivaut à une rotation simple de 90 degrés autour de M_1 dans le sens A vers A_0; donc alors le pôle M_1 serait l'extrémité d'un axe quaternaire, ce qui est contraire aux conditions initiales. Donc il ne peut alors exister aucun autre axe binaire.

Scolie. Soit S, *fig.* 11, un sommet du polyèdre donné; il est permis de supposer que ce sommet est sur la surface de la sphère, en prenant pour unité sa distance OS au centre de figure du polyèdre; ses deux homologues par rapport au pôle ternaire A, sont S′ et S″. Le système SS′S″ se reproduit en $S_0S'_0S''_0$. $S_1S'_1S''_1$, $S_2S'_2S''_2$, en vertu de la binarité des pôles M_0, M_1, M_2. Le système complet des homologues d'un même sommet sera donc, dans le cas actuel, un polyèdre inscriptible à la sphère.

Cette propriété, qui se reproduit dans tous les polyèdres sphéroïdriques, sert de justification au nom que nous leur avons donné; nom qui figure d'ailleurs, avec un sens analogue, dans la terminologie cristallographique du célèbre professeur Weiss.

Corollaire. D'après la disposition des douze sommets de ce polyèdre, il est facile de voir qu'il ne possède point de plans ni de centre de symétrie, du moins dans le cas général où le sommet S n'offre aucune particularité de position dans l'intérieur du triangle sphérique A_0A_2A (*voyez* la démonstration des deux théorèmes suivants).

THÉORÈME XLVI. *Les polyèdres quaterternaires à axes binaires rectangulaires peuvent posséder, soit six plans de symétrie coïncidant avec les six plans qui joignent deux à deux les axes ternaires, soit trois plans de symétrie coïncidant avec les trois plans qui joignent deux à deux les axes binaires; tout autre plan de symétrie ne saurait leur appartenir.*

Toute disposition d'un plan de symétrie autre que celles indiquées dans l'énoncé, obligerait les quatre axes ternaires à se répéter, et doit, par conséquent, être rejetée.

Si A_1AM_1, *fig.* 11, représente un des plans de symétrie, la ternarité du pôle A exige qu'il en soit de même de A_2AM_2, A_0AM_0; la ternarité

du pôle A_1 force d'étendre cette conclusion aux plans $B_2A_1M_0$, $B_0A_1M_2$: il en sera de même de $A_0M_1A_2$, en vertu de la binarité de l'axe OM_1 (théorème XXIII).

Dans ce cas, chacun des triangles $SS'S''$, $S_0S'_0S''_0$, $S_1S'_1S''_1$, $S_2S'_2S''_2$, est remplacé par un hexagone; l'on s'est borné à figurer celui qui entoure le sommet B_0. Les vingt-quatre sommets du polyèdre peuvent se réduire à douze, si le sommet S, qui est censé le régulateur des positions de tous les autres, tombe sur l'un des trois arcs de grand cercle A_0AM_0, A_1AM_1, A_2AM_2; ces sommets peuvent se réduire à quatre, si S coïncide avec A, etc.

Supposons maintenant que $M_2G_0M_1$ représente un plan de symétrie; alors $M_1G_2M_0$, $M_0G_1M_2$ seront aussi des plans de symétrie, en vertu de la ternarité du pôle A. Dans ce cas, le triangle $SS'S''$ se répète autour des pôles A_0, A_1, A_2 : on s'est borné à figurer ce mode de répétition autour du sommet A_1; le triangle $\sigma\sigma'\sigma''$ est alors l'homologue du triangle $SS'S''$ par rapport au plan de symétrie $M_2G_1M_0$.

D'ailleurs ces deux systèmes de plans de symétrie ne peuvent exister simultanément; car il y aurait alors quatre plans de symétrie se coupant au pôle M_0, et l'axe OM_0 serait au moins quaternaire (théorème XI), ce qui est contraire aux conditions de l'énoncé.

Théorème XLVII. *Les polyèdres quaterternaires à axes binaires rectangulaires ne peuvent avoir un centre de symétrie qu'à la condition de posséder trois plans de symétrie joignant deux à deux les axes binaires, et réciproquement la présence de ces plans entraîne celle du centre de symétrie.*

C'est une conséquence des théorèmes XXI et XXII.

Théorème XLVIII. *Le polyèdres quaterternaires à axes binaires rectangulaires ne peuvent avoir que trois modes distincts de symétrie, selon qu'ils sont dépourvus de plans de symétrie, ou qu'ils possèdent soit six plans de symétrie passant par les axes ternaires, soit trois plans de symétrie passant par les axes binaires.*

C'est une conséquence du corollaire du théorème XLV, ainsi que du théorème XLVI. Si l'on tient compte en outre du théorème XLVII,

et des conventions faites à la page 145, on aura les trois symboles

$$[4L^3,\ 3L^2,\ 0C,\ 0P],$$
$$[4L^3,\ 3L^2,\ C,\ 3P^2],$$
$$[4L^3,\ 3L^2,\ 0C,\ 6P].$$

Théorème XLIX. *Tout polyèdre quaterternaire à axes quaternaires possède six axes binaires joignant deux à deux les côtés opposés d'un cube qui aurait les quatre axes ternaires du polyèdre pour diagonales.*

Je dis que si l'on joint le centre O de la sphère de la *fig.* 11 avec le point G_0 milieu de AA_0, cette droite sera un axe binaire du polyèdre.

Donnons au polyèdre une rotation de 90 degrés autour de OM_1, de A vers A_0, et une seconde rotation de 120 degrés autour de OA_0, de B_1 vers A; ce double mouvement, qui ne troublera pas les lieux apparents des sommets, amènera

$$A \text{ en } A_0, \text{ puis en } A_0,$$
$$A_0 \text{ en } B_1, \text{ puis en } A,$$
$$B_1 \text{ en } A_2, \text{ puis en } A_1,$$
$$A_2 \text{ en } A, \text{ puis en } B_2.$$

Le résultat de ces deux rotations est le même que si l'on avait fait tourner le polyèdre de 180 degrés autour de G_0; donc OG_0 est un axe d'ordre pair, qui évidemment ne peut être que binaire, et il en serait de même pour les cinq autres droites homologues de OG_0. Trois des six axes binaires sont situés dans le plan du grand cercle de projection de la sphère.

On prouverait, de même que cela a été déjà fait dans la démonstration du théorème XLV, que toute autre droite serait impropre à être un axe binaire du système.

Théorème L. *Les polyèdres quaterternaires à axes quaternaires, s'ils possèdent des plans de symétrie, en ont nécessairement six passant par les axes ternaires, et trois passant par les axes quaternaires; ils ont en même temps un centre de symétrie.*

Je désignerai par P^3 les plans passant par les axes quaternaires, par P^2 ceux qui passent par les axes ternaires. On a déjà vu (démonstration du théorème XLVI) que ce sont les seuls plans de symétrie possibles.

Admettons l'existence des plans P^4; $M_0G_1M_2$ et $M_0G_2M_1$, *fig.* 11, seront deux plans de symétrie se coupant suivant un axe quaternaire; donc AM_0B_0, $A_1M_0A_2$ seront aussi des plans de symétrie (théorème XXV): le système P^2 s'associe donc au système P^4. On démontrerait de même que le système des plans P^4 s'associe toujours au système des plans P^2.

Les trois plans du système P^4 sont normaux chacun à l'un des trois axes quaternaires. Les six plans du système P^2 sont normaux chacun à l'un des six axes binaires; car, si dans un cube à quatre arêtes verticales on joint deux à deux les milieux de deux de ces quatre arêtes opposées entre elles, chacune de ces droites sera normale au plan qui passe par les deux autres arêtes. L'existence des plans de symétrie entraînera d'ailleurs celle du centre de symétrie (théorème XXII).

Théorème LI. *Les polyèdres quaterternaires à axes quaternaires ne sont susceptibles que de deux modes de symétrie, selon qu'ils possèdent ou ne possèdent pas de plans de symétrie.*

Cela résulte du théorème précédent.

Dans le cas où le polyèdre ne possède aucun plan de symétrie, il ne peut avoir de centre de symétrie, par suite du théorème XXI. Le système complet des homologues du sommet S, *fig.* 11, forme alors un polyèdre inscrit, à vingt-quatre sommets se groupant trois par trois autour de chacun des huit pôles A, A_0, A_1, A_2, B_0, etc. On s'est borné, dans la figure, à représenter le triangle $\sigma_2\sigma'_2\sigma''_2$ qui enveloppe, dans ce cas, le pôle A_2.

Lorsque le polyèdre a ses neuf plans de symétrie, les huit triangles $SS'S''$, $S_0S'_0S''_0$, etc., sont remplacés par huit hexagones, et le système des homologues comprend quarante-huit sommets.

Les symboles de ces deux modes de symétrie seront

$$[3L^4,\ 4L^3,\ 6L^2,\ oC,\ oP],$$
$$[3L^4,\ 4L^3,\ 6L^2,\ C,\ 3P^4,\ 6P^2].$$

Cas des polyèdres décemternaires.

Théorème LII. *Si l'on construit un dodécaèdre régulier ayant pour diagonales les dix axes ternaires d'un polyèdre décemternaire donné,*

les six normales abaissées du centre de figure sur les faces de ce dodécaèdre sont des axes de symétrie quinaire pour le polyèdre.

En prenant l'unité pour rayon, et pour centre le point de mutuelle rencontre des dix axes ternaires, décrivez une sphere qui coupera en A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, *fig.* 12, les moitiés supérieures des dix axes ternaires. (J'ai projeté stéréographiquement la surface de cette sphère sur le plan du grand cercle parallèle à la face $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4'$ du dodécaèdre régulier inscrit dont ces extrémités A_0, A_1, ... B_0, B_1, etc., sont les sommets; le lecteur est prié de se représenter les points et lignes de la figure sur la surface même de la sphère; le centre O de la sphère n'est pas marqué sur le dessin. En joignant deux à deux les intersections, il en résulte des pentagones réguliers sphériques dont les douze centres M, M_0, M_1, ... N_0, N_1, etc., sont les extrémités de rayons menés du centre de la sphere normalement aux douze faces du dodécaedre.

Deux rotations de 120 degrés, l'une autour de OA_0, de A_1 vers B_0, et l'autre autour de OB_0, de A_0 vers C_2, ameneront A_4 en B_0 et A_0 en C_2. Ces deux rotations, qui n'altèrent pas les lieux des sommets du polyèdre, équivalent à une rotation unique de 144 degrés autour de OM_2, de A_0 vers B_0; celle-ci répétée trois fois équivaudra à une rotation de 72 degrés; donc l'axe OM_2 est un axe quinaire, et il en serait de même pour OM, OM_0, OM_1, etc. Les points M_0, M_1, etc., sont les sommets d'un icosaèdre régulier inscrit à la sphere.

Théorème LIII. *Les polyèdres décemternaires possèdent toujours quinze axes binaires.*

Faites tourner le polyedre donné de 72 degrés autour de OM, *fig.* 12, de A_0 vers A_1, puis de 120 degrés autour de OA_1, de A_2 vers A_0; par suite de ces deux mouvements, le pôle A_0 vient en A_1, et A_1 vient en A_0; le résultat final est le même que si le polyedre avait tourné de 180 degrés autour du rayon OG, aboutissant au milieu de l'arc $A_0 A_1$. Or, les lieux apparents des sommets n'ont pas été altérés; donc G est l'extrémité d'un axe d'ordre pair, qui est évidemment un axe binaire. Le dodécaèdre régulier ayant trente côtés opposés deux à deux, le nombre total des axes binaires sera égal à quinze.

Aucun autre diamètre de la sphère ne saurait être un axe binaire;

car, quelle que fût sa position, il forcerait les axes ternaires à se répéter, et l'on aurait plus de dix axes ternaires, ce que nous savons être impossible (théorème XLIII).

On pourrait aussi obtenir les quinze axes binaires, en joignant deux à deux les milieux des arêtes opposées de l'icosaèdre inscrit MM_0M_1....

Théorème LIV. *Les polyèdres décemternaires peuvent avoir pour plans de symétrie les quinze plans passant par les six axes quinaires combinés deux à deux; dans le cas contraire, ces polyèdres n'ont aucun plan de symétrie.*

Considérons en particulier un plan passant par le centre de la sphère et par les sommets M et M_3, *fig.* 12; ce plan sera un plan de symétrie pour le système des points (A_0, A_1), (A_4, A_2),..., (M_2, M_4), (M_1, M_0), etc. : il n'entraîne donc pas la duplication du nombre des axes; ainsi rien ne s'oppose à l'existence d'un tel plan de symétrie.

D'ailleurs le plan MM_3 est perpendiculaire à la droite KK', qui est un axe binaire du système. Les homologues de ce plan sont, en tout, au nombre de quinze, savoir : MM_0, MM_1, MM_2, MM_3, MM_4; M_0M_2, M_1M_3, M_2M_4, M_3M_0, M_4M_1; M_0M_1, M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_0. Ce sont évidemment les seuls plans de symétrie que puisse posséder le polyèdre; pour toute autre position, le nombre des axes ternaires deviendrait supérieur à 10, ce qui ne peut être (théorème XLIII).

La *fig.* 12 offre la disposition des soixante sommets homologues de S autour des pôles A_0, A_1, etc., dans le cas où le polyèdre ne possède aucun plan de symétrie.

Mais lorsque les quinze plans de symétrie ci-dessus indiqués existent dans le polyèdre, le triangle SS'S'' est remplacé par un hexagone; pour ne pas surcharger la figure, on s'est borné à représenter l'un de ces hexagones, celui qui environnerait le pôle B_0. Le système des homologues de S comprend alors cent vingt sommets; pour certaines positions particulières de S, ce nombre peut se réduire à soixante, à vingt, et même à douze sommets. Ce dernier cas se réalise, si le sommet S est situé à l'extrémité de l'un des axes quinaires du système

Théorème LV. *Lorsqu'un polyèdre décemternaire possède les quinze plans de symétrie indiqués dans l'énoncé du théorème précédent, ces*

plans sont normaux aux quinze axes binaires, et le polyèdre possede un centre de symétrie; il en est dépourvu dans le cas contraire.

Il résulte de la démonstration du théoreme précédent que l'axe binaire KOK′, *fig.* 12, est normal au plan M_3GMA_3. Or ce plan est l'un des quinze plans de symétrie du polyèdre; donc chacun de ces plans est normal à l'un des quinze axes binaires: donc le polyedre possede alors un centre de symétrie (théorème XXII). Mais si le polyèdre était dépourvu de plans de symétrie, il ne pourrait avoir de centre de symétrie, à cause de ses axes binaires (théorème XXI).

THÉORÈME LVI. *Les polyèdres décemternaires ont deux modes distincts de symétrie, selon qu'ils ont ou non un centre de symétrie.*

C'est une conséquence des théoremes LIV et LV.

Les symboles de ces deux modes seront

$$[6L^5,\ 10L^3,\ 15L^2,\ 0C,\ 0P],$$
$$[6L^5,\ 10L^3,\ 15L^2,\ C,\ 15P^2].$$

THÉORÈME LVII. *Les axes qui caractérisent la symétrie des polyedres quaterternaires à axes binaires rectangulaires entrent aussi dans la symétrie des polyèdres décemternaires.*

Choisissons arbitrairement un sommet d'axe ternaire tel que A_2, *fig.* 12 : le milieu G de l'un des deux côtés A_1A_0, A_3A_4 adjacents au côté A_0A_4, qui est l'opposé du sommet A_2 dans le pentagone $A_0A_1A_2A_3A_4$, sera l'extrémité d'un axe binaire (théorème LIII) : il en sera de même des points H, K qui sont les homologues de G par rapport à l'axe ternaire OA_2. Dans le triangle sphérique HGK, les trois angles H, G, K sont droits; donc les trois côtés HG, KG, HK sont égaux à 90 degrés.

Les trois axes OG, OH, OK sont donc trois axes binaires rectangulaires, et le triangle sphérique GHK est trirectangle. Le sommet A_2 est le centre de ce triangle. De même A_4 sera le centre du triangle trirectangle GHK′, B_0 celui du triangle trirectangle GK′H′, H′ étant l'extremité inférieure de l'axe OH, et B_1 celui du triangle trirectangle KGH′.

Les quatre axes ternaires OA_2, OA_4, OB_0, OB_1 se combinent donc avec trois axes binaires rectangulaires, dans les conditions de situation

relative qui caractérisent les polyèdres quaterternaires à axes binaires rectangulaires.

Scolie. A la combinaison OA_2, OA_4, OB_0, OB_1 on pourrait substituer l'une quelconque des quatre combinaisons suivantes

$$[OA_0, OA_3, OB_1, OB_2], \quad [OA_0, OA_2, OB_3, OB_4],$$
$$[OA_1, OA_3, OB_0, OB_4], \quad [OA_1, OA_4, OB_2, OB_3].$$

Théorème LVIII. *Les polyèdres* $[6L^5, 10L^3, 15L^2, 0C, 0P]$ *possèdent tous les éléments de la symétrie des polyèdres* $[4L^3, 3L^2, 0C, 0P]$; *les polyèdres* $[6L^5, 10L^3, 15L^2, C, 15P^2]$ *possèdent tous les éléments de la symétrie des polyèdres* $[4L^3, 3L^2, C, 3P^2]$.

La partie de cet énoncé, relative aux axes de symétrie, a déjà été démontrée dans le théorème précédent; on en conclut facilement que les polyèdres $[6L^5, 10L^3, 15L^2, 0C, 0P]$ possèdent tous les éléments de la symétrie des polyèdres $[4L^3, 3L^2, 0C, 0P]$.

Si, de plus, le polyèdre décemternaire contient quinze plans de symétrie, les plans KG, GH, HK de la *fig.* 12 en feront partie, et représenteront les plans $3P^2$ des polyèdres $[4L^3, 3L^2, C, 3P^2]$. Le centre de symétrie C existant de part et d'autre, on voit que la symétrie caractérisée par $[4L^3, 3L^2, C, 3P^2]$ sera comprise dans celle plus complète des polyèdres $[6L^5, 10L^3, 15L^2, C, 15P^2]$.

Nota. Les théorèmes LVII et LVIII n'intéressent que d'une maniere indirecte la théorie générale des polyèdres symétriques. Ils figurent ici, en vue des applications que l'on peut en faire, dans la cristallographie, à l'étude des corps du Système cubique.

Classification des polyèdres d'après la nature de leur symetrie, avec indication du nombre minimum de leurs sommets.

POLYÈDRE			SYMBOLE DE LA SYMÉTRIE du polyèdre	CLASSE du polyèdre.	NOMBRE MINIMUM DES SOMMETS DE. 1re espece.	2me espece.	3me espece.	4me espece.
asymetrique.			oL, oC, oP	1re	1	1	1	1
symétrique	dépourvu d'axes		oL, C, oP	2me	2	2	2	
			oL, oC, P	3me	1	1	1	
	pourvu d'un axe principal	d'ordre pair.	A^{2q}, oL^2, oC, oP	4me	$2q$	$2q$		
			A^{2q}, oL^2, C, Π	5me	$2q$	$2q$		
			A^{2q}, qL^2, qL'^2, oC, oP	6me	$\frac{1}{2}q$			
			A^{2q}, oL^2, oC, qP, qP'	7me	$2q$	1		
			A^{2q}, qL^2, qL'^2, C, Π, qP^2, qP'^2	8me	$2q$	0 ou $2q$*		
			A^{2q}, $2qL^2$, oC, 2qP	9me	$\frac{1}{2}q$			
		d'ordre impair.	A^{2q+1}, oL^2, oC, oP	10me	$2q+1$	$2q+1$		
			A^{2q+1}, oL^2, C, oP	11me	$\frac{1}{2}q+2$	$\frac{1}{2}q+2$		
			A^{2q+1}, oL^2, oC, Π	12me	$2q+1$	$2q+1$		
			A^{2q+1}, $(2q+1)L^2$, oC, oP	13me	$\frac{1}{2}q+2$			
			A^{2q+1}, oL^2, oC, $(2q+1)P$	14me	$2q+1$	1		
			A^{2q+1}, $(2q+1)L^2$, C, $(2q+1)P^2$	15me	$\frac{1}{2}q+2$			
			A^{2q+1}, $(2q+1)L^2$, oC, Π, $(2q+1)P$	16me	$2q+1$			
	sphéroïdrique	quaternaire.	$4L^2$, $3L^2$, oC, oP	17me	12			
			$4L^2$, $3L^2$, C, $3P^2$	18me	12			
			$4L^2$, $3L^2$, oC, 6P	19me	4			
			$3L^4$, $4L^2$, $6L'^2$, oC, oP	20me	24			
			$3L^4$, $4L^2$, $6L'^2$, C, $3P^4$, $6P'^2$	21me	6			
		décem-ternaire.	$6L^4$, $10L^2$, $15L'^2$, oC, oP	22me	60			
			$6L^4$, $10L^2$, $15L'^2$, C, $15P^2$	23me	12			

* Le nombre minimum des sommets de 2me espece est égal à $2q$, si $q=1$, et à 0, si $q>1$

Ce tableau offre une classification des polyèdres en vingt-trois classes, d'après les principes exposés dans ce Mémoire. Pour l'interprétation des symboles A, L, L', C, Π, P, P', on consultera les pages 144 et 145.

On remarquera que les classes 4me, 5me, jusqu'à la 16me inclusive-

ment, se subdivisent elles-mêmes en différents ordres, d'après le numéro d'ordre de la symétrie de l'axe principal.

Veut-on, d'après ce tableau, connaître les éléments intégrants de la symétrie d'un polyèdre de la 7me classe, 4me ordre? Son symbole sera

$$[A^4, 0L^2, 0C, 2P, 2P'];$$

d'où l'on voit que ce polyèdre possède un axe quaternaire, quatre plans de symétrie passant par cet axe, et croisés à 45 degrés, deux plans d'une première espèce rectangulaires entre eux, et deux autres pareillement rectangulaires entre eux, mais d'une autre espèce que les précédents, pas d'axe binaire, ni de centre de symétrie.

Les quatre dernières colonnes font connaître le nombre minimum de sommets de chaque polyèdre : tous les sommets de même espèce forment un système de sommets homologues, et il existe autant de tels systèmes d'homologues que d'espèces différentes de sommets, dans le polyèdre.

Avec un peu de réflexion, on trouvera facilement la figure que doit avoir le polyèdre à nombre minimum de sommets. Ainsi le polyèdre le plus simple sera :

Dans la 1re classe, le tétraèdre irrégulier;

Dans la 2me classe, l'octaèdre irrégulier à bases parallélogrammiques :

Dans la 3me classe, le triangle scalène;

Dans la 19me classe, le tétraèdre régulier;

Dans la 21me classe, l'octaèdre régulier;

Dans la 23me classe, l'icosaèdre régulier, etc.

MÉMOIRE

Sur l'équation différentielle à laquelle satisfont les séries

$$1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 + \ldots,$$
$$2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \ldots;$$

Par M. C.-G.-J. JACOBI.

(Extrait du Journal de M. Crelle, tome XXXIV. — Traduction de M. Puiseux.)

Le problème de définir par une équation différentielle une fonction donnée est, en général, indéterminé; car, au moyen de l'équation qui a lieu entre la fonction et la variable indépendante, on peut transformer l'équation différentielle d'une infinité de manières. Mais le probleme devient déterminé si, la fonction n'étant pas algébrique, il s'agit, comme on le sous-entend ordinairement, de trouver une équation algébrique entre la variable indépendante, la fonction et ses dérivées. Parmi toutes les équations différentielles de cette sorte auxquelles une même fonction satisfait, il y en a une de l'ordre le moins élevé possible et dont les autres se déduisent par la différentiation. C'est de celle-là qu'il sera question dans ce Mémoire quand on parlera de l'équation différentielle à laquelle une fonction satisfait. Si l'on rend le premier membre rationnel et entier, le second étant zéro, le plus haut exposant dont se trouvera affectée la dérivée de l'ordre le plus élevé sera appelé le *degré de l'équation*.

On n'a pas de méthode générale pour reconnaître s'il existe une pareille équation différentielle finie entre la fonction et la variable indépendante, ou pour la trouver, en supposant qu'on soit assuré de son existence. Dans le cas seulement où la fonction satisfait à une équation différentielle *linéaire*, on a quelques procédés généraux

pour s'en assurer et former l'équation différentielle elle-meme. Si l'on considère en particulier la série

$$y = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots,$$

dont la loi est si simple, il n'y a, malgré cette simplicité, aucun moyen de reconnaître, *par la considération de la série elle-même*, si elle peut être définie par une équation différentielle finie, c'est-à-dire par une équation algébrique entre la variable indépendante, la fonction et ses dérivées. Et, s'il est possible de trouver une pareille équation à l'aide de la théorie des fonctions elliptiques, à quelles considérations indirectes et compliquées ne faut-il pas recourir! On est obligé de montrer d'abord que les quantités y et q peuvent s'exprimer en fonction d'une troisième variable k à l'aide des équations transcendantes

$$y = \sqrt{\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}},$$

$$\log\frac{1}{q} = \frac{\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + k^2\sin^2\varphi}}}{\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}}.$$

Bien que les méthodes variées de la théorie des fonctions elliptiques permettent d'abréger la démonstration de ce théoreme remarquable, on n'y parvient cependant que par une longue chaîne de propositions délicates. Cela fait, on prouve que le numérateur et le dénominateur de l'expression de $\log\frac{1}{q}$ satisfont l'un et l'autre à une même équation différentielle du second ordre, où k est la variable indépendante. Alors il devient possible d'exprimer en y et k le rapport $\frac{d\log q}{dk}$, et, par suite, de remplacer, dans l'équation différentielle du second ordre qui a lieu entre y et k, les dérivées de y prises par rapport à k par d'autres prises par rapport à q. On obtient ainsi une équation qui détermine k au moyen de y et de ses dérivées relatives à q. Enfin, par une nouvelle différentiation et par l'élimination de k, on trouve entre y

et ses dérivées prises par rapport à q, une équation du troisième ordre et du second degré, qui est l'équation différentielle demandée. Relativement à y et à ses dérivées, elle monte à la *quatorzième dimension* : aussi, malgré tout ce que nous savons sur les formes quadratiques, il serait sans doute difficile de la vérifier par la substitution immédiate de la série. Je veux donner ici, avec quelques détails, le calcul assez pénible qui conduit à cette équation différentielle, dont la complication contraste singulièrement avec la simplicité de la série proposée.

La substitution

$$\cos\psi = \frac{k'\sin\varphi}{\Delta}, \quad \sin\psi = \frac{\cos\varphi}{\Delta}, \quad \sqrt{1-k^2\sin^2\psi} = \frac{k'}{\Delta}.$$

où l'on a

$$k' = \sqrt{1-k^2}, \quad \Delta = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},$$

donne

$$\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = -\frac{d\varphi}{\Delta},$$

et, par suite, les équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \Delta\, d\varphi = k'^2 \int \frac{d\varphi}{\Delta}, \\ &\int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} = \int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3}, \\ &\int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} = k'^2 \int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta}, \end{aligned}\right.$$

où les intégrales, comme dans tout ce qui suivra, doivent être supposées prises de o à $\frac{1}{2}\pi$. Si l'on désigne la fonction complète de première espèce par

$$K = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

on a

$$kK = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{1}{k^2}-\sin^2\varphi}}, \quad k'K = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{k'^2}+\sin^2\varphi}}.$$

En différentiant ces trois intégrales par rapport à k^2, et ayant égard aux formules (1), on obtient les équations suivantes :

$$\frac{d\mathrm{K}}{d.k^2} = \frac{1}{2}\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{2k'^2}\int\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\Delta},$$

$$\frac{d.k\mathrm{K}}{d.k^2} = \frac{1}{2k}\int\frac{d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{2kk'^2}\int\Delta\,d\varphi;$$

$$\frac{d.k'\mathrm{K}}{d.k^2} = -\frac{1}{2k'}\int\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\Delta^3} = -\frac{1}{2k'}\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta}.$$

La dernière se trouve aisément, si l'on observe que $d.k^2 = -d.k'^2$.

On a, de plus, en ayant de nouveau égard aux équations (1),

$$\frac{d.\int\frac{k^2\cos^2\varphi\,d\varphi}{\Delta}}{d.k^2} = \frac{d.\int\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}\left(\frac{1}{\Delta}-\Delta\right)d\varphi}{d.k^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\cos^2\varphi}{\Delta}+\frac{\cos^2\varphi}{\Delta}\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{\Delta},$$

$$\frac{d.\int\frac{1}{k}\Delta\,d\varphi}{d.k^2} = \frac{d.\int\sqrt{\frac{1}{k^2}-\sin^2\varphi}\,d\varphi}{d.k^2} = -\frac{1}{2k^3}\int\frac{d\varphi}{\Delta},$$

$$\frac{d.\int\frac{k^2}{k'}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta}}{d.k^2} = \frac{d.\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{k'^2}+\sin^2\varphi}}}{d.k'^2} - \frac{d.\int\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{k'^2}+\sin^2\varphi}\,d\varphi}{d.k'^2}$$

$$= \frac{1}{2k'^3}\int\left(\frac{k'^2\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta^3}+\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta}\right) = \frac{1}{2k'^2}\int\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Si donc on pose

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2}\pi.\mathrm{A},\quad k\mathrm{K} = \frac{1}{2}\pi.\mathrm{A}_1,\quad k'\mathrm{K} = \frac{1}{2}\pi.\mathrm{A}_2,$$

et, en outre,

$$k^2\int\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\Delta} = \frac{1}{2}\pi.\mathrm{B},$$

$$\frac{1}{k}\int\Delta\,d\varphi = \frac{1}{2}\pi.\mathrm{B}_1,$$

$$\frac{k^2}{k'}\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta} = \frac{1}{2}\pi.\mathrm{B}_2,$$

on aura

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dA}{d.k^2} = \dfrac{1}{2k^2k'^2}B, & \dfrac{dB}{d.k^2} = \dfrac{1}{2}A; \\ \dfrac{dA_1}{d.k^2} = \dfrac{1}{2k'^2}B_1, & \dfrac{dB_1}{d.k^2} = -\dfrac{1}{2k^2}A_1; \\ \dfrac{dA_2}{d.k^2} = -\dfrac{1}{2k^2}B_2, & \dfrac{dB_2}{d.k^2} = \dfrac{1}{2k'^2}A_2. \end{cases}$$

La premiere de ces équations montre que A satisfait à l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d.k^2k'^2\dfrac{dA}{d.k^2}}{d.k^2} = \frac{1}{4}A.$$

ou, en faisant, pour abréger,

$$\frac{d.k^2}{k^2k'^2} = d.\log\frac{k^2}{k'^2} = dl,$$

à l'équation différentielle

$$\frac{d^2A}{dl^2} = \frac{1}{4}k^2k'^2A.$$

Cette équation différentielle ne change pas, quand on y change k en k'. La quantité

$$K' = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}$$

en est donc aussi une intégrale. Des deux équations

$$\frac{d^2A}{dl^2} = \frac{1}{4}k^2k'^2A, \quad \frac{d^2K'}{dl^2} = \frac{1}{4}k^2k'^2K',$$

il suit

$$A\frac{d^2K'}{dl^2} - K'\frac{d^2A}{dl^2} = 0;$$

et, en intégrant,

$$A\frac{dK'}{dl} - K'\frac{dA}{dl} = \alpha,$$

où α est une constante. Cette équation peut être écrite

$$\frac{d.\dfrac{K'}{A}}{dl} = \frac{\alpha}{A^2} \quad \text{ou} \quad \frac{d.\dfrac{K'}{A}}{d.k^2} = \frac{\alpha}{k^2k'^2.A^2}.$$

La fraction $\frac{1}{k'^2 A^2} = \frac{\pi^2}{4 k'^2 K^2}$ peut se développer pour de petites valeurs de k en une série ordonnée suivant les puissances positives de k^2, et commençant par l'unité; d'où il suit, par l'intégration, que, pour les petites valeurs de k, la valeur de $\frac{K'}{A} = \frac{\pi K'}{2K}$ est, aux quantités pres de l'ordre k^2,

$$\alpha \log k^2 + \beta,$$

β désignant une nouvelle constante. Euler a trouvé les valeurs de α et de β dans les *Opuscula varii argumenti*, savoir :

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \log 4.$$

En substituant la valeur de α. et posant

$$\log q = -\frac{\pi K'}{K} = -\frac{2K'}{A},$$

on trouve

$$(3) \qquad \frac{d.\log q}{d.k^2} = \frac{1}{k^2 k'^2 A^2} = \frac{1}{k'^2 A_1^2} = \frac{1}{k^2 A_2^2},$$

ou encore

$$(3\ bis) \qquad \frac{d.\log \frac{k^2}{k'^2}}{d.\log q} = A^2, \quad \frac{d.\log \frac{1}{k'^2}}{d.\log q} = A_1^2, \quad \frac{d.\log k^2}{d.\log q} = A_2^2.$$

Si, à l'aide des formules (3), on introduit la différentielle de $\log q$ à la place de $d.k^2$, les formules (2) deviennent

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{dA}{d\log q} = \frac{1}{2} BA^2, & \frac{dB}{d\log q} = \frac{1}{2} k^2 k'^2 A^3, \\ \frac{dA_1}{d\log q} = \frac{1}{2} B_1 A_1^2, & \frac{dB_1}{d\log q} = -\frac{1}{2}\frac{k'^2}{k^4} A_1^3, \\ \frac{dA_2}{d\log q} = -\frac{1}{2} B_2 A_2^2, & \frac{dB_2}{d\log q} = \frac{1}{2}\frac{k^2}{k'^4} A_2^3. \end{array} \right.$$

Si donc on pose

$$A = \frac{1}{C}, \quad A_1 = \frac{1}{C_1}, \quad A_2 = \frac{1}{C_2},$$

et qu'on indique par des accents les dérivées des fonctions C, prises

par rapport à $\log q$, on aura

$$(5)\qquad 4C^3C'' = -k^2k'^2,\quad 4C_1^3C_1'' = \frac{k'^2}{k^2},\quad 4C_2^3C_2'' = \frac{k}{k'^2}.$$

Je remarque maintenant que, si dans l'expression

$$\frac{\sqrt{4h+1}-1}{\sqrt{4h+1}+1}$$

on substitue pour h les trois quantités précédentes

$$-k^2k'^2,\quad \frac{k'^2}{k^2},\quad \frac{k^2}{k'^2},$$

en prenant pour la deuxième le radical négativement, on trouve

$$-\frac{k^2}{k'^2},\quad \frac{1}{k'^2},\quad k^2,$$

c'est-à-dire, d'après les équations (3 *bis*), les trois quantités dont les logarithmes ont pour différentielles

$$A^2\,d\log q,\quad A_1^2\,d\log q,\quad A_2^2\,d\log q,$$

ou bien

$$\frac{d\log q}{C^2},\quad \frac{d\log q}{C_1^2},\quad \frac{d\log q}{C_2^2};$$

mais on a

$$d\log\frac{\sqrt{4h+1}-1}{\sqrt{4h+1}+1} = \frac{dh}{h\sqrt{4h+1}} = \frac{d\log h}{\sqrt{4h+1}}.$$

Si donc on substitue pour h dans $\frac{d\log h}{\sqrt{4h+1}}$ les trois valeurs (5), on obtiendra

$$\frac{d\log q}{C^2},\quad \frac{d\log q}{C_1^2},\quad \frac{d\log q}{C_2^2}.$$

Il suit de là que la même équation différentielle

$$(6)\qquad d\log C^3C'' = \sqrt{16C^3C''+1}\,\frac{d\log q}{C^2}$$

a lieu pour les trois quantités C, C_1, C_2, pourvu qu'on prenne le radical négativement quand on met C_1 à la place de C. En rendant

cette équation rationnelle, on trouve, pour les trois fonctions

$$C = \frac{\pi}{2K}, \quad C_1 = \frac{\pi}{2kK}, \quad C_2 = \frac{\pi}{2k'K},$$

la même équation différentielle du troisième ordre et du second degré

$$(7) \qquad C^2(CC''' + 3C'C'')^2 = C''^2(16C^3C'' + 1).$$

Si l'on pose

$$C = y^{-2},$$

et qu'on indique encore par des accents les dérivées de y prises par rapport à $\log q$, on trouve successivement

$$C' = -2y^{-3}y', \quad C'' = -2y^{-3}y'' + 6y^{-4}y'^2,$$
$$C''' = -2y^{-3}y''' + 18y^{-4}y'y'' - 24y^{-5}y'^3,$$

et, par suite,

$$CC''' + 3C'C'' = -2y^{-5}y''' + 30y^{-6}y'y'' - 60y^{-7}y'^3.$$

Alors l'équation différentielle (7) devient, en la multipliant par $\frac{1}{4}y^{18}$,

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(y^2y''' - 15yy'y'' + 30y'^3)^2 + 32(yy'' - 3y'^2)^3 \\ &\quad = y^{10}(yy'' - 3y'^2)^2. \end{aligned} \right.$$

Aux trois valeurs de C correspondent trois valeurs de y qui satisfont à cette équation, savoir :

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}}, \quad \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}, \quad \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}.$$

Si donc on a égard aux développements en séries ordonnées, suivant les puissances de q que la théorie des fonctions elliptiques fournit pour ces quantités, on obtient le théorème suivant :

Théorème. *Si l'on désigne par y une des trois séries*

$$1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 + 2q^{16} \pm 2q^{25} + \ldots,$$
$$2\left(\sqrt[4]{q} + \sqrt[4]{q^9} + \sqrt[4]{q^{25}} + \sqrt[4]{q^{49}} + \ldots\right),$$

et qu'on prenne $d\log q$ pour la différentielle constante, il existe entre

y et q l'équation différentielle suivante du troisième ordre et du second degré,

$$(y^2 d^3 y - 15\,dy\,d^2 y + 30\,dy^3)^2 + 32(y d^2 y - 3\,dy^2)^3$$
$$= y^{10}(y d^2 y - 3\,dy^2)^2 (d \log q)^2.$$

Les deux séries

$$1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots = \sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}},$$

$$1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots = \sqrt{\frac{2k'\mathrm{K}}{\pi}},$$

qui satisfont toutes deux à l'équation différentielle précédente, se déduisent l'une de l'autre par le changement de q en $-q$. Plus généralement, comme l'équation différentielle (8) ne contient pas la variable q elle-même, mais seulement des différentielles prises par rapport à $\log q$, on peut, de chaque expression de y qui satisfait à cette équation, en déduire une autre par la substitution de αq à la place de q, α étant une constante arbitraire. Si dans la série

$$2\sqrt[4]{q}(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + q^{20} + \ldots) = \sqrt{\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}},$$

qui est une solution de l'équation différentielle (8), on change q en $-q$, ce qui revient à poser $\alpha = -1$, cette série se trouve multipliée par une racine huitième de l'unité. L'équation différentielle (8) ne doit donc pas changer quand on y multiplie y par une racine huitième de l'unité, c'est-à-dire que les dimensions de ses termes, évaluées par rapport à y et à ses dérivées, doivent différer entre elles de multiples de 8. Et, en effet, par rapport à y et à ses dérivées, les termes du premier membre sont de la sixième dimension, tandis que ceux du second sont de la quatorzième.

L'équation

$$d \log q = \frac{d.k^2}{k^2 k'^2 \left(\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\right)^2} = \frac{d.k^2}{k^2 k'^2 y^4}$$

reste la même, quand on y change q en q^m, et en même temps y en $\frac{y}{\sqrt[4]{m}}$ (ou C en $\sqrt{m}\mathrm{C}$). Il suit de là que, *étant donnée une fonction*

qui satisfait à l'équation différentielle (8), *on en déduit une autre qui satisfait à la même équation, en multipliant la fonction donnée par* $\sqrt[4]{m}$ *et changeant en même temps* q *en* q^m. Il faut donc que, dans chaque terme de l'équation (8), la somme des ordres des dérivées, moins le quart de la dimension de ce terme évaluée par rapport à y et à ses dérivées, soit toujours un même nombre, ou que la différence entre les sommes des ordres des dérivées dans deux termes quelconques soit égale au quart de la différence de leurs dimensions. C'est bien ce qui a lieu, car le quart de la différence des dimensions des termes du premier et du second membre est

$$\frac{1}{4}(14 - 6) = 2,$$

et la différence entre les sommes des ordres des dérivées est de même

$$6 - 4 = 2.$$

On démontre, dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques, que, par le changement de q en q^m, m étant un nombre rationnel quelconque, la fonction complète K $\left(\text{et par conséquent aussi } C = \frac{\pi}{2K}\right)$ est multipliée par un facteur qui est une fonction algébrique de k. Soit g ce facteur; il suit de ce qui précède que l'équation différentielle (7) étant satisfaite par la fonction C, doit l'être aussi par la fonction $\frac{gC}{\sqrt{m}}$. Il y a donc une infinité de cas dans lesquels deux intégrales de l'équation (7) peuvent se déduire l'une de l'autre, en multipliant l'une d'elles par une fonction algébrique de k. Si, en général, on désigne par f un facteur tel que $fC = \frac{\pi f}{2K}$, mis à la place de C, satisfasse encore à l'équation (7), on peut trouver, comme il suit, l'équation qui a lieu entre ce facteur f et le module k.

L'équation différentielle (7) entre C et q a été trouvée par l'élimination de $k^2k'^2$ entre les équations

$$4C^3C'' = -k^2k'^2, \quad \frac{d\log - k^2k'^2}{\sqrt{1 - 4k^2k'^2}} = \frac{d\log q}{C^2},$$

dont la seconde est une conséquence de l'équation

$$d\log\frac{k^2}{k'^2} = dl = \frac{d\log q}{C^2}.$$

Celle-ci nous donne pour une fonction quelconque u,

$$C^2 u' = C^2\frac{du}{d\log q} = \frac{du}{dl}.$$

Si l'on pose

$$D = f.C.$$

et qu'on indique par des accents les dérivées de D et de f prises par rapport à $\log q$, comme on l'a fait pour les dérivées de y, C et u, il vient

$$D'' = fC'' + 2f'C' + f''C.$$

On a donc

$$4D^3D'' = -4f^4k^2k'^2 + 4f^3C^2\frac{d.C^2f'}{d\log q}$$
$$= -4f^4k^2k'^2 + 4f^3\frac{d^2f}{dl^2},$$

$$\frac{dl}{f^2} = \frac{d\log q}{D^2}.$$

Si l'on fait

(9) $$-4f^4k^2k'^2 + 4f^3\frac{d^2f}{dl^2} = H.$$

et qu'on suppose la fonction f déterminée de façon qu'on ait

(10) $$\frac{d\log H}{\sqrt{4H+1}} = \frac{dl}{f^2}.$$

on a les deux équations

(11) $$4D^3D'' = H, \quad \frac{d\log H}{\sqrt{4H+1}} = \frac{d\log q}{D^2}.$$

Si l'on élimine H entre ces équations, on obtient entre D et q une équation différentielle qui est la même qu'on a trouvée entre C et q. D'un autre côté, si l'on substitue dans l'équation (10) la valeur de H donnée par la formule (9), on obtient entre f et k une équation différentielle du troisième ordre, qui, en faisant

$$l = \log k,$$

ou

$$\frac{k^2}{k'^2} = k_1,$$

devient

$$k_1^2 f^4 \left(\frac{dH}{dk_1}\right)^2 = H^2 + 4H^3, \tag{12}$$

et où la lettre H, en vertu de l'équation (9), désigne la quantité

$$4k_1^2 f^3 \frac{d^2 f}{dk_1^2} + 4k_1 f^3 \frac{df}{dk_1} - \frac{4k_1 f^4}{(1+k_1)^2} = H. \tag{13}$$

Comme la fonction

$$D = \frac{\pi f}{2K}$$

est une intégrale de l'équation (7), pourvu que f soit une intégrale de l'équation (12), de même et réciproquement la quantité

$$f = \frac{2K}{\pi} D$$

sera une intégrale de l'équation (12), si D est une intégrale de l'équation (7). En effet, quand on pose

$$4D^3 D'' = H,$$

l'équation (7), à laquelle D satisfait, se change dans l'équation (10). Si donc on détermine f par l'équation

$$D = \frac{\pi f}{2K} = fC,$$

on obtiendra pour H, en différentiant deux fois, la valeur (9), et, en la substituant dans l'équation (10), on trouvera l'équation différentielle (12).

Il suit des équations (3 *bis*) et (5) qu'on peut, sans changer $d \log q$ et l'équation (7), mettre $\frac{1}{k'^2}$ et k^2 à la place de $-\frac{k^2}{k'^2}$, pourvu qu'en même temps on change K en kK et k'K. Si donc $f(k_1)$ désigne une quelconque des intégrales de l'équation (12), non-seulement

$$\frac{\pi}{2K} f\left(\frac{k^2}{k'^2}\right),$$

mais encore les fonctions

$$\frac{\pi}{2k\mathrm{K}} f\left(-\frac{1}{k'^2}\right), \quad \frac{\pi}{2k'\mathrm{K}} f(-k^2)$$

seront des intégrales de l'équation (7). Réciproquement, si D est une quelconque des intégrales de l'équation (7), les fonctions

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\mathrm{D}, \quad \frac{2k\mathrm{K}}{\pi}\mathrm{D}, \quad \frac{2k'\mathrm{K}}{2\pi}\mathrm{D}$$

seront des intégrales de l'équation (12), pourvu que dans cette équation k_1 représente respectivement les quantités

$$\frac{k^2}{k'^2}, \quad -\frac{1}{k'^2}, \quad -k^2.$$

L'équation différentielle (12) est satisfaite par une infinité de valeurs algébriques de f qui ne diffèrent que par un facteur numérique des valeurs du multiplicateur M qui se présente dans la théorie de la multiplication des fonctions elliptiques. L'équation algébrique entre le module donné k et le module transformé λ étant connue, le carré de ce multiplicateur est donné rationnellement en k et λ par la formule générale

$$(14) \qquad \mathrm{M}^2 = \frac{(\lambda - \lambda^3)\,dk}{n(k - k^3)\,d\lambda},$$

où n désigne l'ordre de la transformation. Outre cela, on a, entre les deux premières dérivées de M par rapport à k et la première dérivée de λ, l'équation différentielle

$$(15) \qquad \mathrm{M}\left\{(k - k^3)\frac{d^2\mathrm{M}}{dk^2} + (1 - 3k^2)\frac{d\mathrm{M}}{dk} - k\mathrm{M}\right\} + \frac{\lambda\, d\lambda}{n\, dk} = 0.$$

Dans les *Fundamenta* (page 77) on a déduit des équations (14) et (15), par l'élimination de M, l'équation différentielle du troisième ordre qui a lieu entre deux modules susceptibles d'être transformés l'un dans l'autre. Mais si entre les deux mêmes équations différentielles on élimine au lieu de M le module transformé λ, on obtient pour $\sqrt{n}.\mathrm{M}$ la même équation différentielle qu'on a trouvée ci-dessus pour f, et qui est indépendante de l'ordre de la transformation. On peut, en effet,

en posant

$$\lambda'^2 = 1 - \lambda^2, \quad l = \log \frac{k^2}{k'^2},$$

remplacer les deux équations (14) et (15) par les deux suivantes :

$$(16) \quad \begin{cases} n^2\left(-4M^4 k^2 k'^2 + 4M^3 \frac{d^2M}{dl^2}\right) = -\lambda^2\lambda'^2, \\ d\log\frac{\lambda^2}{\lambda'^2} = \frac{d\log -\lambda^2\lambda'}{\sqrt{1-4\lambda^2\lambda'^2}} = \frac{dl}{nM}. \end{cases}$$

Mais si l'on fait

$$H = -\lambda^2\lambda'^2, \quad f = \sqrt{n}.M,$$

les équations (9) et (10) reviennent aux équations (16); les fonctions $\sqrt{n}.M$ sont donc des intégrales, et des intégrales algébriques, de l'équation différentielle entre f et $k_1 = \frac{k^2}{k'^2}$.

Les équations différentielles en C et y, établies plus haut, ont été déduites de l'équation différentielle linéaire du second ordre dont k et K′ sont des intégrales particulières, combinée avec l'équation

$$d\log q = d.\frac{-\pi K'}{K} = \frac{d.k^2}{k^2k'^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2}.$$

Si l'on met pour K et K′ les deux intégrales complètes de la première, savoir :

$$Q = aK + \sqrt{-1}\,bK', \quad Q' = a'K' + \sqrt{-1}\,b'K,$$

il vient

$$d.\frac{-\pi Q'}{Q} = \frac{(aa'+bb')d.k^2}{k^2k'^2\left(\frac{2Q}{\pi}\right)^2}.$$

Il suit de là que, dans les équations différentielles trouvées entre K, k et q, on peut, au lieu de K et de $\log q$, mettre généralement les quantités

$$\frac{Q}{\sqrt{aa'+bb'}} \quad \text{et} \quad -\frac{\pi Q'}{Q}.$$

L'intégrale complète des équations différentielles (7) et (8) est donc fournie par le système des deux équations

$$(17)\quad \begin{cases} (\cos x)^{-\frac{1}{2}} = y = \sqrt{\dfrac{\frac{2}{\pi}(a\mathrm{K} + \sqrt{-1}\,b\mathrm{K}')}{\sqrt{aa' + bb'}}}, \\ \log q = -\dfrac{\pi(a'\mathrm{K}' + \sqrt{-1}\,b'\mathrm{K})}{a\mathrm{K} + \sqrt{-1}\,b\mathrm{K}'}, \end{cases}$$

où a, b, a', b' désignent des constantes arbitraires, et où les quantités K *et* K' *sont des fonctions données d'une troisième quantité k, savoir, les fonctions elliptiques complètes de première espèce pour les modules k et $\sqrt{1-k^2}$.*

En posant

$$-\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}} = r,$$

d'où il suit

$$\sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}} = 1 + 2e^{\pi r} + 2e^{4\pi r} + 2e^{9\pi r} + \ldots,$$

on déduit de la seconde des équations (17),

$$\log q = \frac{\pi(a'r - \sqrt{-1}\,b')}{a - \sqrt{-1}\,br},$$

et, par conséquent,

$$r = \frac{a\log q + \sqrt{-1}\,b'\pi}{a'\pi + \sqrt{-1}\,b\log q}, \quad a - \sqrt{-1}\,br = \frac{(aa' + bb')\pi}{a'\pi + \sqrt{-1}\,b\log q}.$$

La valeur complète de y, exprimée en x, devient

$$y = \sqrt{\frac{a - \sqrt{-1}\,br}{\sqrt{aa' + bb'}}} \cdot \left(1 + 2e^{\pi r} + 2e^{4\pi r} + 2e^{9\pi r} + \ldots\right).$$

Si dans ces formules on met a, b, a', b', au lieu de

$$\frac{a}{\sqrt{aa' + bb'}}, \quad \frac{b}{\sqrt{aa' + bb'}}, \quad \frac{a'}{\sqrt{aa' + bb'}}, \quad \frac{b'}{\sqrt{aa' + bb'}},$$

et qu'on fasse

$$q = e^{\pi\rho}, \quad \log q = \pi\rho.$$

on obtient le théoreme suivant :

La série

$$y = 1 + 2e^{\pi\rho} + 2e^{4\pi\rho} + 2e^{9\pi\rho} + \ldots,$$

satisfait à l'équation différentielle du troisième ordre

$$\begin{aligned} y^2 d^3 y - 15 y dy d^2 y + 30 dy^3)^2 + 32(y d^2 y - 3 dy^2)^3 \\ = y^{10}(y d^2 y - 3 dy^2)^2 \pi^2 d\rho^2, \end{aligned}$$

dans laquelle $d\rho$ est la différentielle constante, et l'intégrale complète de cette équation différentielle est

$$y = \frac{1 + 2e^{\pi r} + 2e^{4\pi r} + 2e^{9\pi r} + \ldots}{\sqrt{a' + \sqrt{-1}\, b\rho}},$$

où

$$r = \frac{a\rho + \sqrt{-1}\, b'}{a' + \sqrt{-1}\, b\rho},$$

et où a, a', b, b' désignent des constantes arbitraires, mais assujetties toutefois à vérifier la relation

$$aa' + bb' = 1.$$

On peut déduire ce théoreme du premier théoreme donné plus haut, en démontrant :

Que si, ayant fait $\pi\rho = \log q$, on désigne par $y = f(\rho)$ une intégrale particulière quelconque de l'équation différentielle (8), *et qu'on pose*

$$r = \frac{a\rho + \sqrt{-1}\, b'}{a' + \sqrt{-1}\, b\rho}, \quad \text{où} \quad aa' + bb' = 1,$$

la fonction

$$y = \frac{f(r)}{\sqrt{a' + \sqrt{-1}\, b\rho}}$$

est l'intégrale complète de l'équation (8).

C'est ce qu'on démontre aisément comme il suit :

L'équation différentielle (8), quand on y fait $y = C^{-\frac{1}{2}}$, se change

dans l'équation différentielle (7), qui résulte, comme nous l'avons vu, de l'élimination de H entre les deux équations

$$4C^3C'' = H, \quad \frac{d\log H}{\sqrt{1+4H}} = \frac{d\log q}{C^2}.$$

Si l'on pose

$$\log q = \pi\rho,$$

et qu'on prenne pour C une intégrale particulière quelconque de l'équation différentielle (7),

$$C = \varphi(\rho) = [f(\rho)]^{-2},$$

les deux équations précédentes deviennent, en se servant, pour indiquer les dérivées, de la notation de Lagrange,

$$4\varphi(\rho)^3\,\varphi''(\rho) = \pi^2 H, \quad \frac{d\log H}{\sqrt{1+4H}} = \frac{\pi\,d\rho}{\varphi(\rho)^2}.$$

En écrivant r à la place de ρ, on aura à la fois deux équations de la forme

$$4\varphi(r)^3\,\varphi''(r) = \pi^2 H_1, \quad \frac{d\log H_1}{\sqrt{1+4H_1}} = \frac{\pi\,dr}{\varphi(r)^2}.$$

Soient a, b, a', b' des constantes pour lesquelles on ait

$$aa' + bb' = 1,$$

et

$$r = \frac{a\rho + \sqrt{-1}\,b'}{a' + \sqrt{-1}\,b\rho}, \quad dr = \frac{d\rho}{(a' + \sqrt{-1}\,b\rho)^2},$$

puis

$$\psi(\rho) = (a' + \sqrt{-1}\,b\rho)\,\varphi(r):$$

on trouve, en différentiant deux fois,

$$\psi'(\rho) = \sqrt{-1}\,b\varphi(r) + \frac{\varphi'(r)}{a' + \sqrt{-1}\,b\rho},$$

$$\psi''(\rho) = \frac{\varphi''(r)}{(a' + \sqrt{-1}\,b\rho)^3}:$$

et, par suite,

$$\psi(\rho)^3\,\psi''(\rho) = \varphi(r)^3\,\varphi''(r).$$

D'après cela, et en ayant égard à la formule

$$\frac{dr}{\varphi(r)^2} = \frac{d\rho}{(a' + \sqrt{-1}\, b\rho)^2 \varphi(r)^2} = \frac{d\rho}{\psi(\rho)^2},$$

on voit que les deux équations

$$(4\varphi(r)^3 \varphi''(r) = \pi^2 H_1, \quad \frac{d \log H_1}{\sqrt{1 + 4H_1}} = \frac{\pi\, dr}{\varphi(r)^2}$$

se changent dans les deux équations toutes pareilles

$$(4\psi(\rho)^3 \psi''(\rho) = \pi^2 H_1, \quad \frac{d \log H_1}{\sqrt{1 + 4H_1}} = \frac{\pi\, d\rho}{\psi(\rho)^2}$$

Il suit de là que la fonction

$$\psi(\rho) = (a' + \sqrt{-1}\, b\rho)\, \varphi(r)$$

est, aussi bien que $\varphi(\rho)$, une intégrale de l'équation (7); donc aussi la fonction

$$[\psi(\rho)]^{-\frac{1}{2}} = \frac{f(r)}{\sqrt{a' + \sqrt{-1}\, b\rho}}$$

est une intégrale de l'équation (8); et ce sont bien là les intégrales complètes de ces deux équations différentielles, puisqu'elles contiennent trois constantes arbitraires.

On a vu, ci-dessus, que la série

$$2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + 2\sqrt[4]{q^{49}} + \ldots$$

est une intégrale de l'équation (8). On peut donc, au moyen du théorème qui vient d'être démontré, déduire aussi de cette série l'intégrale complète de l'équation (8), et il faut que l'intégrale ainsi trouvée comprenne l'intégrale complète qu'on a obtenue sous une autre forme. Il est donc toujours possible de déterminer les constantes a, b, a', b' dans l'expression

$$r = \frac{a\rho + \sqrt{-1}\, b'}{a' + \sqrt{-1}\, b\rho},$$

de sorte qu'on ait

$$\frac{1 + 2e^{\pi r} + 2e^{4\pi r} + 2e^{9\pi r} + \ldots}{\sqrt{a' + \sqrt{-1}\, b\rho}} = 2e^{\frac{1}{4}\pi\rho} + 2e^{\frac{9}{4}\pi\rho} + 2e^{\frac{25}{4}\pi\rho} + \ldots.$$

La théorie des fonctions elliptiques enseigne que cette détermination est possible d'une infinité de manières. Il résulte, en effet, de la théorie des formes en nombre infini de la transcendante Θ [*], que l'équation précédente a toujours lieu, lorsque les nombres a, b, a', b' étant des entiers positifs ou négatifs, a, a' et b sont impairs, et que les restes de la division de a' et de b par 4 sont inégaux. *Le signe de la racine carrée qui forme le dénominateur dans la formule précédente, depend de la valeur de la quantité désignée par* $\left(\frac{a'}{b}\right)$ *dans la théorie des résidus quadratiques.* On peut arriver de deux manieres à cette détermination du signe, soit au moyen d'un développement en fraction continue, soit à l'aide des sommes considérées par Gauss, dans le Mémoire intitulé : *Summatio serierum quarundam singularium.* L'équation précédente aura toujours lieu en supposant a et b impairs, pourvu qu'on multiplie un de ses deux membres par une racine huitieme de l'unité. Si les nombres a et b sont l'un pair et l'autre impair, on a l'équation

$$\delta . \frac{1 + 2e^{\pi r} + 2e^{4\pi r} + 2e^{9\pi r} + \cdots}{\sqrt{a' + \sqrt{-1}\, b\rho}} = 1 \pm 2e^{\pi\rho} + 2e^{4\pi\rho} \pm 2e^{9\pi\rho} + \ldots$$

ou δ désigne une racine huitieme de l'unité, et ou l'on doit prendre le signe supérieur ou le signe inférieur, suivant que des deux nombres a' et b l'un est pair et l'autre impair, ou que tous deux sont impairs.

Les développements en série qui précèdent supposent que les parties réelles des quantités ρ et r sont négatives. Si ρ remplit cette condition, mais qu'elle n'ait pas lieu pour r, on peut multiplier les constantes a et b' par $\sqrt{-1}$, et diviser les constantes a' et b par $\sqrt{-1}$, de façon qu'on ait toujours

$$aa' + bb' = 1,$$

et que r se changeant en $-r$ acquiere une partie réelle négative. *Pour des valeurs réelles quelconques des constantes arbitraires* a, a',

---

* J'ai developpé cette théorie dans plusieurs leçons faites à l'Université de Kœnigsberg, et je me propose de la publier dans une autre occasion.

b, b', si la partie réelle de ρ est négative, celle de r sera aussi toujours négative. En effet, si l'on pose

$$\rho = -\rho_0 + \rho_1\sqrt{-1},$$

on aura

$$r = -\frac{a\rho_0 + (a\rho_1 + b_1)\sqrt{-1}}{a' - b\rho_1 - b\rho_0\sqrt{-1}}$$

$$= -\frac{\rho_0 + \sqrt{-1}\,[(a' - b\rho_1)(a\rho_1 + b_1) - ab\rho_0^2]}{(a' + b\rho_1)^2 + b^2\rho_0^2};$$

d'où résulte la proposition qu'on vient d'énoncer.

Sur les équations différentielles de la dynamique réduites au plus petit nombre possible de variables;

PAR M. JULES VIEILLE.

Soient $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, etc., les équations de condition qui existent entre les coordonnées x, y, z, x', etc., des différents points d'un système en mouvement, et qui sont données par la nature de chaque problème. Désignons par n le nombre des points matériels, par i le nombre de ces équations de condition. On peut en tirer les valeurs de i coordonnées en fonction des $3n - i$ autres, ou, plus généralement, on peut concevoir que les $3n$ coordonnées soient remplacées par des fonctions connues de $3n - i$ nouvelles variables θ, φ, ψ, etc., et, par cette transformation, on sait que la formule générale de la dynamique

$$(1) \quad \sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0$$

se partage en $3n - i$ équations distinctes, qui suffisent pour déterminer les valeurs de θ, φ, ψ, etc., en fonction du temps.

Lagrange a donné, dans la deuxième partie de la *Mécanique analytique*, une forme remarquable à ces équations différentielles. Ce qui les caractérise et les rend éminemment propres à la résolution de la plupart des problèmes, c'est que les termes différentiels qu'elles renferment proviennent uniquement d'une seule fonction T, qui n'est autre que la demi-somme des forces vives de tous les points du système.

Cependant ces équations, si utiles, sont omises dans les Traités de mécanique les plus répandus.

La démonstration de Lagrange n'est pas complète. Elle suppose, en effet, que l'expression de chaque *différentielle dx*, en fonction des nouvelles variables θ, φ, ψ, etc., ne diffère de la *variation* correspon-

dante δx que par le changement du d en δ. Or cela est bien vrai, lorsque la fonction des variables θ, φ, ψ, etc., que x représente, ne contient pas le temps t explicitement. Mais il n'en est plus ainsi, si x est une fonction explicite de t et de θ, φ, ψ, etc.; soit

$$x = f(t, \theta, \varphi, \psi, \ldots).$$

Alors la différentielle dx renferme le terme $\frac{df}{dt}dt$ qui n'a pas son correspondant dans la variation δx, puisqu'en prenant cette variation on doit laisser t constant.

C'est pourquoi nous croyons faire une chose utile à l'enseignement en reprenant l'analyse de Lagrange, et lui donnant toute la rigueur désirable; en même temps, nous en simplifierons l'algorithme, puis nous appliquerons ces équations à divers problèmes de dynamique, dont elles fournissent une solution très-simple.

Soient donc θ, φ, ψ, etc., les variables réduites au plus petit nombre possible, dont x, y, z, x', etc., sont des fonctions connues, déduites des équations de condition

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0:$$

comme ces dernières peuvent contenir le temps t explicitement, cette variable entrera généralement dans les fonctions que x, y, z, x', etc., représentent. Posons

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta', \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi', \quad \frac{d\psi}{dt} = \psi', \ldots.$$

On aura, pour $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, δx, δy, δz, des expressions de la forme

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha + a\theta' + a_1\varphi' + \ldots, & \delta x = a\delta\theta + a_1\delta\varphi + \ldots, \\ \frac{dy}{dt} = \beta + b\theta' + b_1\varphi' + \ldots, & \delta y = b\delta\theta + b_1\delta\varphi + \ldots, \\ \frac{dz}{dt} = \gamma + c\theta' + c_1\varphi' + \ldots, & \delta z = c\delta\theta + c_1\delta\varphi + \ldots. \end{cases}$$

α, β, γ représentant les dérivées partielles de x, y, z, par rapport à t. Ces quantités, ainsi que a, b, c, a_1, b_1, c_1, etc., sont des fonctions connues de t, θ, φ, ψ, etc.

Cela posé, avant de substituer dans l'équation (1) les valeurs de

x, y, z, $\frac{dx}{dt}, \ldots$, δx, etc., on transforme le trinôme

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)$$

en deux groupes contenant des différentielles du premier ordre, et soumis, l'un au signe d, l'autre au signe δ; à cet effet, on a identiquement

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right) - \frac{1}{2}\delta\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right).$$

en sorte que l'équation (1) prend la forme

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum m\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right) - \frac{1}{2}\delta\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right)\right] \\ &- \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0. \end{aligned}\right.$$

Maintenant, nous calculerons séparément les deux quantités

$$\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right);$$

mais, comme on devra finalement égaler à zéro l'ensemble des termes que multipliera chacune des variations indépendantes $\delta\varsigma$, $\delta\varsigma_1$, etc., et que d'ailleurs ces variables entrent évidemment de la même manière dans les calculs, nous nous attacherons seulement à faire ressortir la composition du coefficient de $\delta\varsigma$.

On aura ainsi

$$\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z = (H + P\varsigma' + Q\varsigma_1' + \ldots)\delta\varsigma + \ldots,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) = G + H\varsigma' + P\frac{\varsigma'^2}{2} + Q\varsigma'\varsigma_1' + \ldots.$$

en posant

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= G, \\ \alpha a + \beta b + \gamma c &= H, \\ a^2 + b^2 + c^2 &= P, \\ \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 &= Q \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Différentions la première expression par d et la deuxième par δ, il viendra $\left(\text{en observant que } \frac{d.\delta\theta}{dt} = \delta.\frac{d\theta}{dt} = \delta.\theta'\right)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right)$$

$$= \delta\theta \times \frac{d}{dt}(\mathrm{H} + \mathrm{P}\theta' + \mathrm{Q}\varphi' + \ldots) + (\mathrm{H} + \mathrm{P}\theta' + \mathrm{Q}\varphi' + \ldots)\delta\theta' + \ldots,$$

$$\frac{1}{2}\delta\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) = \left(\frac{d\mathrm{G}}{d\theta} + \theta'\frac{d\mathrm{H}}{d\theta} + \frac{\theta'^2}{2}\frac{d\mathrm{P}}{d\theta} + \theta'\varphi'\frac{d\mathrm{Q}}{d\theta} + \ldots\right)\delta\theta$$
$$+ (\mathrm{H} + \mathrm{P}\theta' + \mathrm{Q}\varphi' + \ldots)\delta\theta' + \ldots.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (3), les *termes multipliés par $\delta\theta'$ disparaissent d'eux-mêmes*, c'est cette réduction qui fait le succès de la méthode. Et il reste pour le coefficient de la variation $\delta\theta$

$$(4)\quad \sum m\left[\frac{d}{dt}(\mathrm{H} + \mathrm{P}\theta' + \mathrm{Q}\varphi' + \ldots) - \left(\frac{d\mathrm{G}}{d\theta} + \theta'\frac{d\mathrm{H}}{d\theta} + \frac{\theta'^2}{2}\frac{d\mathrm{P}}{d\theta} + \theta'\varphi'\frac{d\mathrm{Q}}{d\theta} + \ldots\right)\right].$$

Actuellement, soit T la demi-somme des forces vives du système, on aura

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\sum m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) = \sum m\left(\mathrm{G} + \mathrm{H}\theta' + \mathrm{P}\frac{\theta'^2}{2} + \mathrm{Q}\theta'\varphi' + \ldots\right):$$

et, par suite, on voit que l'expression (4) n'est autre chose que

$$\frac{d\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\theta'}\right)}{dt} - \frac{d\mathrm{T}}{d\theta}.$$

Quant à la partie du premier membre de l'équation (3) qui renferme les forces appliquées (X, Y, Z), savoir :

$$\sum(\mathrm{X}\delta x + \mathrm{Y}\delta y + \mathrm{Z}\delta z),$$

sa transformation en fonction des variables θ, φ, ψ, etc., s'effectuera par voie de simple substitution, et on connaîtra ainsi, dans chaque cas particulier, le coefficient de $\delta\theta$ qui en provient. Dans les applications ordinaires de la dynamique, il existe une *fonction des forces*; c'est-à-dire qu'on a

$$\sum(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) = d\mathrm{V},$$

V étant fonction de θ, φ, ψ, etc.; et, par suite,

$$\sum (X\partial x + Y\partial y + Z\partial z) = \partial V = \frac{dV}{d\theta}\partial\theta + \ldots.$$

Le coefficient complet de $\partial\theta$, dans l'équation (3), sera donc

$$\frac{d\left(\frac{dT}{d\theta'}\right)}{dt} - \frac{dT}{d\theta} - \frac{dV}{d\theta}.$$

En définitive, l'équation (3) se partage dans les suivantes

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d.\left(\frac{dT}{d\theta'}\right)}{dt} - \dfrac{dT}{d\theta} - \dfrac{dV}{d\theta} = 0. \\[2ex] \dfrac{d\left(\frac{dT}{d\varphi'}\right)}{dt} - \dfrac{dT}{d\varphi} - \dfrac{dV}{d\varphi} = 0. \\[2ex] \dfrac{d.\left(\frac{dT}{d\psi'}\right)}{dt} - \dfrac{dT}{d\psi} - \dfrac{dV}{d\psi} = 0.\ldots \end{cases}$$

Ces équations sont en même nombre que les variables θ, φ, ψ, etc., dont dépend à chaque instant la position du système.

Quand la fonction T ne renfermera pas t explicitement, on obtiendra immédiatement une intégrale première des équations (5) en les multipliant respectivement par $d\theta$, $d\varphi$, $d\psi$, et ajoutant les produits, cette intégrale

$$(6)\qquad T - V = \text{constante}$$

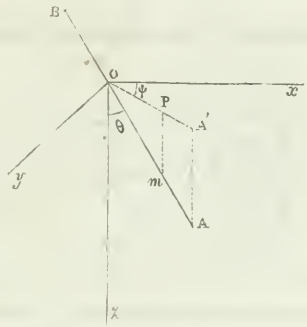
contient le principe des forces vives.

M. Liouville a fait une application remarquable de ces équations (*Journal de Mathématiques*, t. XI) à divers cas où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer : notamment le problème du mouvement d'un point attiré par deux centres fixes, dans lequel Euler n'était parvenu à séparer les variables que par un calcul très-pénible, se trouve réduit aux quadratures avec une extrême simplicité; et la même méthode résout sans plus de peine le cas, imaginé par Lagrange, d'un troisième centre fixe d'attraction placé au milieu de la droite qui joint les deux autres.

Pour montrer avec quelle facilité ces équations se prêtent à la solution des problèmes, nous allons présenter quelques applications. Nous traiterons d'abord deux problèmes qui ont été proposés dans ces dernières années au concours d'agrégation.

Problème. *Déterminer le mouvement d'une droite pesante, libre de tourner dans l'espace autour d'un de ses points supposé fixe.*

Fig. 1.



On prendra pour origine le point fixe O, et l'axe des z vertical dans le sens de la pesanteur. Ici, les variables qui déterminent la position du système à chaque instant sont au nombre de deux, savoir, l'angle $AOz = \theta$, que fait la tige AB avec l'axe des z, et l'angle $A'Ox = \psi$, que sa projection horizontale fait avec l'axe des x. Soient M la masse de la tige que nous ne supposons pas homogène; a la distance de son centre de gravité au point O; r le rayon vecteur Om d'un point quelconque m; r' la projection OP de r; on cherchera d'abord les fonctions T et V.

On a immédiatement

$$V = Mag \cos \theta.$$

Pour la fonction T, on trouve successivement

$$T = \frac{1}{2} \sum m \left(\frac{dr'^2 + r'^2 d\psi^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right) = \frac{1}{2} \sum mr^2 (\theta'^2 + \sin^2 \theta . \psi'^2)$$

$$= \frac{1}{2} (\theta'^2 + \sin^2 \theta . \psi'^2) M (a^2 + K^2):$$

MK^2 désigne le moment d'inertie de la tige par rapport à un axe perpendiculaire à sa direction et passant par le centre de gravité.

Cela posé, l'équation (6) donne d'abord

$$(7) \qquad \theta'^2 + \sin^2\theta\,\psi'^2 = C + \frac{2g}{a + \frac{K^2}{a}}\cos\theta,$$

C étant une constante arbitraire.

Il suffira donc d'associer à cette équation l'une des équations (5) : comme T et V ne contiennent pas la variable ψ, on choisira de préférence la suivante

$$\frac{d\left(\frac{dT}{d\psi'}\right)}{dt} - \frac{dT}{d\psi} - \frac{dV}{d\psi} = 0$$

qui se réduit à

$$\frac{d\left(\frac{dT}{d\psi'}\right)}{dt} = 0,$$

d'où

$$\frac{dT}{d\psi'} = \text{constante},$$

ou bien

$$(8) \qquad \sin^2\theta\,.\,\psi' = C',$$

C' étant une deuxième constante arbitraire.

Les équations (7) et (8) résolvent le problème proposé.

Si la tige pesante se réduisait à un point matériel distant du point O de la longueur l, les équations de son mouvement se déduiraient des deux précédentes en faisant

$$K = 0 \quad \text{et} \quad a = l.$$

Il suit de là que la tige pesante se meut autour du point O, comme un pendule simple de longueur

$$l = a + \frac{K^2}{a}.$$

Le problème qui nous occupe est ainsi ramené au pendule conique.

On tirera des équations (7) et (8) les valeurs de dt et $d\psi$ en fonction

de θ,

$$dt = \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\left(C + \frac{2g}{l}\cos\theta\right)\sin^2\theta - C'^2}}, \quad d\psi = \frac{C'\, d\theta}{\sin\theta\sqrt{\left(C + \frac{2g}{l}\cos\theta\right)\sin^2\theta - C'^2}}.$$

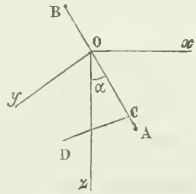
Ces formules sont réductibles aux fonctions elliptiques, et ne peuvent conséquemment s'intégrer que par approximation. Quand la tige sera homogène, on aura aisément la longueur du pendule simple correspondant; car, en désignant par L la longueur de la tige, et supposant, pour plus de simplicité, que le point fixe soit l'une des extrémités, on trouve

$$l = a + \frac{K^2}{a} = \frac{\int r^2 dr}{aL} = \frac{2}{3}L.$$

Ainsi, dans ce cas, la longueur du pendule simple est $\frac{2}{3}$ de celle de la tige.

Les constantes C et C′ se déterminent d'après les données initiales.

Fig. 2.



Soient α l'angle AOz que la tige AB, dans sa position initiale, fait avec la verticale; CD la direction de la percussion qui lui a été imprimée, et qu'on peut supposer perpendiculaire à la tige. Celle-ci commencera évidemment à tourner dans le plan OCD; car il n'y a pas de raison pour que le mouvement commence d'un côté de ce plan plutôt que d'un autre : d'ailleurs, on peut considérer ce plan comme celui de deux axes principaux relatifs au point O. On appliquera donc la formule de la vitesse angulaire de rotation, comme s'il y avait un axe fixe perpendiculaire en O au plan OCD. Soient ω cette vitesse angulaire, $\mu\nu$ l'intensité de la percussion, f la distance OC, on aura

$$\omega = \frac{\mu\nu f}{M(a^2 + K^2)}:$$

or la vitesse initiale v d'un point quelconque M de la tige est $r\omega$. Si donc on remplace le premier membre de l'équation (7), qui n'est autre que $\frac{v^2}{r^2}$, par la valeur ci-dessus de ω^2, on aura l'équation

$$\omega^2 = c + \frac{2g}{l}\cos\alpha, \quad \left(l = a + \frac{k^2}{a}\right). \tag{9}$$

qui déterminera la constante c.

Quant à la constante c', on a, d'après l'équation (8),

$$c' = \sin^2\alpha\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0;$$

or $\sin\alpha\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0$ représente la vitesse initiale de la projection horizontale du point de la tige dont la distance au point fixe est l'unité; on a donc, en désignant par ε l'angle de la direction CD avec une perpendiculaire au plan zOA,

$$\sin\alpha\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 = \omega\cos\varepsilon;$$

il en résulte

$$c' = \omega\cos\varepsilon.\sin\alpha. \tag{10}$$

Nous ne dirons rien du cas où la tige s'écarte très-peu de la verticale. On néglige alors les quantités très-petites du troisième ordre en θ et α, et les valeurs de θ et ψ s'obtiennent en fonction du temps sous forme finie par les formules du pendule conique.

Quelles conditions doit remplir la percussion initiale *pour que la tige décrive un cône droit* autour de la verticale?

On a constamment, dans ce cas,

$$\theta = \alpha,$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

D'après la valeur précédente de $\frac{d\theta}{dt}$, on en conclut

$$\sin^2\alpha\left(c + \frac{2g}{l}\cos\alpha\right) - c'^2 = 0;$$

mais cette équation exprime seulement que $\frac{d\theta}{dt}$ est nul pour $\theta = \alpha$, c'est-à-dire à l'origine du mouvement : il faut y joindre la condition $d\frac{d\theta}{dt} = 0$; ce qui donne

$$\frac{g}{\cos\alpha} = \frac{c'^2}{\sin^4\alpha}.$$

Il reste à substituer dans ces deux équations les valeurs des constantes c et c' tirées des équations (9) et (10); la premiere se réduit alors à

$$\cos\varepsilon = 1, \quad \text{d'où} \quad \varepsilon = 0,$$

et la seconde se réduit à

$$\omega^2 = \frac{g\sin^2\alpha}{l\cos\alpha}:$$

$\varepsilon = 0$ signifie que la percussion doit être dirigée perpendiculairement au plan vertical qui contient la tige. L'équation

$$\omega^2 = \frac{g\sin^2\alpha}{l\cos\alpha}$$

permettra d'assigner la grandeur de la percussion correspondante à un angle α donné; et réciproquement, si la percussion est donnée, on en conclura l'angle α, en résolvant l'équation

$$\cos^2\alpha + \frac{\omega^2 l}{g}\cos\alpha - 1 = 0,$$

qui admet toujours pour $\cos\alpha$ *une* valeur réelle, et plus petite que 1. Enfin, l'équation (8) montre que le cône droit sera décrit d'un mouvement uniforme : la vitesse de ce mouvement

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega}{\sin\alpha}.$$

Désignons cette vitesse par k, et remplaçons ω par la valeur précédente, nous aurons

$$k = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}.$$

On voit que, dès que l'angle α sera donné, cette vitesse k sera déterminée indépendamment de la percussion; quelle que soit cette vitesse, il y aura une valeur minima $\sqrt{\frac{g}{l}}$, au-dessous de laquelle k ne saurait tomber : mais cette limite ne sera jamais atteinte, car il faudrait que α fût zéro; la tige serait alors verticale, et comme ω serait nul aussi, il n'y aurait pas de percussion; la tige resterait donc en repos.

Pour compléter la solution du problème, il nous reste à calculer la pression variable P que supporte le point fixe. Cette recherche conduit à des résultats dignes d'être remarqués. La méthode consiste, comme on sait, à imaginer qu'on applique en O une force égale et contraire à la pression; on peut alors regarder la tige comme devenue libre, et appliquer les six équations d'équilibre d'un corps solide. Soient X_1, Y_1, Z_1 les composantes de la pression P; x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité de la tige; les forces perdues s'expriment aisément en fonction de x_1, y_1, z_1, et les sommes de leurs composantes parallèlement à chaque axe sont

$$-M\frac{d^2x_1}{dt^2}, \quad -M\frac{d^2y_1}{dt^2}, \quad -M\left(\frac{d^2z_1}{dt^2}-g\right).$$

D'après cela, les trois premières équations d'équilibre, qui renferment seules les composantes X_1, Y_1, Z_1 de la pression, sont

$$(11)\quad \begin{cases} X_1 + M\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = 0, \\ Y_1 + M\dfrac{d^2y_1}{dt^2} = 0, \\ Z_1 + M\left(\dfrac{d^2z_1}{dt^2} - g\right) = 0. \end{cases}$$

On a, d'ailleurs,

$$x_1 = a\sin\theta\cos\psi, \quad y_1 = a\sin\theta\sin\psi, \quad z_1 = a\cos\theta.$$

Ces équations feront connaître les trois composantes de la pression en fonction des variables θ et ψ, qui, elles-mêmes, sont des fonctions connues de t, par les formules précédentes; mais le calcul direct des valeurs de X_1, Y_1, Z_1 serait fort compliqué. On le simplifie notablement, en ayant recours aux trois équations des moments. Ces équations,

dans lesquelles nous introduisons les coordonnées $x_1 y_1 z_1$, sont

$$(12)\quad \begin{cases} x_1 \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} - y_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = 0, \\ y_1 \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} - z_1 \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = \dfrac{ga y_1}{l}, \\ z_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} - x_1 \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} = -\dfrac{ga x_1}{l}. \end{cases}$$

Elles se réduisent à deux distinctes.

Des équations (11) et (12) combinées, on déduit, sans difficulté,

$$Y_1 x_1 - X_1 y_1 = 0 \quad \text{et} \quad Z_1 y_1 - Y_1 z_1 = Mg\, y_1 \left(1 - \frac{a}{l}\right).$$

Ces équations mettent en évidence deux propriétés de la pression : 1° les composantes X_1, Y_1 étant proportionnelles à x_1, y_1, il s'ensuit que *la pression est toujours comprise dans le plan vertical qui contient la tige;* 2° les composantes Z_1, Y_1 n'étant pas proportionnelles aux coordonnées z_1, y_1 $\left(\text{puisque } l \text{ ou } a + \frac{k^2}{a} \text{ est essentiellement différent de } a\right)$, il s'ensuit que *la pression n'est pas dirigée suivant la tige.*

Les deux équations précédentes permettent, en outre, d'exprimer X_1 et Y_1 en fonction de Z_1 *sans coefficients différentiels :*

$$Y_1 = \left[Z_1 - Mg\left(1 - \frac{a}{l}\right)\right]\frac{y_1}{z_1}, \quad X_1 = \left[Z_1 - Mg\left(1 - \frac{a}{l}\right)\right]\frac{x_1}{z_1};$$

on en conclut

$$P^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = Z_1^2 + \left[Z_1 - Mg\left(1 - \frac{a}{l}\right)\right]^2 \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}.$$

Tout se réduit donc à déterminer Z_1 en fonction de θ. La troisième équation (11) donne, à cet effet,

$$Z_1 = M\left(g + a\cos\theta \cdot \frac{d\theta^2}{dt^2} + a\sin\theta \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}\right).$$

On connaît déjà $\frac{d\theta}{dt}$ en fonction de θ; on en tirera $\frac{d^2\theta}{dt^2}$; et, substituant, il viendra

$$Z_1 = M\left[g\left(1 - \frac{a}{l}\right) + ac\cos\theta + \frac{3ag}{l}\cos^2\theta\right];$$

par suite,

$$P^2 = M^2 \left[\begin{array}{c} g^2 \left(1 - \frac{a}{l}\right)^2 + a^2 c^2 + 2agc \left(1 + \frac{2a}{l}\right) \cos\theta \\ + \frac{3ag^2}{l} \left(2 + \frac{a}{l}\right) \cos^2\theta \end{array} \right].$$

L'inclinaison γ de la pression sur la verticale sera également connue en fonction de θ, puisque

$$\cos\gamma = \frac{Z_1}{P}.$$

La grandeur et la direction de la pression ne dépendent explicitement que de la variable θ, et non de ψ. Quand l'angle θ sera constant, c'est-à-dire dans le cas où la tige décrit un cône droit, la pression sera constante, et sa direction décrira également un cône droit autour de la verticale. La valeur générale de P se réduit, dans ce cas, à

$$P = Mg\sqrt{1 + \frac{a^2}{l^2}\tang^2\alpha},$$

on a, d'ailleurs,

$$Z_1 = Mg;$$

d'où

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{l^2}\tang^2\alpha}},$$

ou bien

$$\tang\gamma = \frac{a}{l}\tang\alpha.$$

Comme $\frac{a}{l}$ est < 1, l'angle au centre du cône droit que décrit la pression est plus petit que celui du cône droit que décrit la tige.

Ces dernières formules, relatives au cas du cône droit, s'obtiendraient directement et d'une manière beaucoup plus simple, en remarquant que les *forces effectives* sont alors immédiatement connues de grandeur et de direction, puisque chaque point m décrit un cercle dont le rayon ρ est $r\sin\alpha$, avec une vitesse

$$v = r\omega = r\sin\alpha\sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}.$$

La force effective $\frac{mv^2}{\rho}$ a donc pour valeur $\frac{mrg}{l}\tang\alpha$, et comme sa

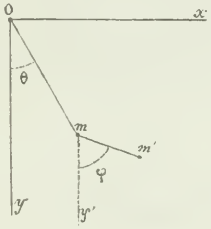
direction ne varie pas d'un point à un autre, la résultante des forces effectives est égale à leur somme

$$\sum \frac{mv^2}{\rho} = \mathrm{M}a\frac{g}{l}\operatorname{tang}\alpha.$$

Cette résultante, prise en sens contraire et composée avec la pesanteur Mg, donne, pour la pression P, la valeur précédemment trouvée.

Problème II. *Déterminer le mouvement d'un fil flexible et inextensible suspendu à un point fixe o et chargé de deux points matériels pesants m, m'. On suppose qu'à l'origine du mouvement, les deux points matériels aient été écartés de la verticale sans sortir d'un plan vertical passant par le point fixe, puis abandonnés à eux-mêmes sans vitesse initiale.*

Fig. 3.



Le mouvement oscillatoire de chaque point aura évidemment lieu dans le plan vertical yox qui passe par la position initiale du fil. Soit $om = a$, $mm' = b$; les deux inconnues du problème sont les angles $moy = \theta$, $m'my' = \varphi$ que font les deux portions du fil avec la verticale

On a, pour le point m,

$$x = a\sin\theta,$$
$$y = a\cos\theta,$$

et pour m',

$$x' = a\sin\theta + b\sin\varphi.$$
$$y' = a\cos\theta + b\cos\varphi;$$

d'où l'on conclut aisément

$$\mathrm{V} = (m + m')ga\cos\theta + m'gb\cos\varphi,$$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\left[(m + m')a^2.\theta'^2 + m'b^2\varphi'^2 + 2m'ab\cos(\varphi - \theta).\theta'\varphi'\right].$$

Ces valeurs, substituées dans les équations (5), fournissent les deux équations du mouvement :

$$(13)\quad \begin{cases} (m+m')a\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + m'b\cos(\varphi-\theta)\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} - m'b\sin(\varphi-\theta)\dfrac{d\varphi}{dt}\left(\dfrac{d\varphi}{dt}-\dfrac{d\theta}{dt}\right) \\ \qquad - m'b\sin(\varphi-\theta)\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\dfrac{d\varphi}{dt} + (m+m')g\sin\theta = 0, \\ b\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + a\cos(\varphi-\theta)\dfrac{d^2\theta}{dt^2} - a\sin(\varphi-\theta)\dfrac{d\theta}{dt}\left(\dfrac{d\varphi}{dt}-\dfrac{d\theta}{dt}\right) \\ \qquad + a\sin(\varphi-\theta)\dfrac{d\theta}{dt}\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 + g\sin\varphi = 0. \end{cases}$$

On pourrait remplacer l'une d'elles par l'*équation des forces vives*, qui n'est que du premier ordre; mais nous ne le ferons pas, parce que cette dernière équation se prête moins bien à la détermination des *petites oscillations* dont nous allons nous occuper.

Si les oscillations sont supposées très-petites, on pourra négliger les carrés de θ, φ, $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, et les produits de ces variables: les équations (13) se réduisent ainsi aux deux suivantes :

$$(m+m')a\frac{d^2\theta}{dt^2} + m'b\frac{d^2\varphi}{dt^2} + (m+m')g\theta = 0,$$

$$b\frac{d^2\varphi}{dt^2} + a\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\varphi = 0.$$

La première peut encore se simplifier, en égard à la seconde, et l'on a finalement le système

$$(14)\quad \begin{cases} ma\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + g(m+m')\theta - gm'\varphi = 0, \\ a\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + b\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + g\varphi = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont linéaires et à coefficients constants, tandis que si l'on avait employé l'équation des forces vives, on aurait obtenu une équation, du premier ordre à la vérité, mais *non linéaire*, puisqu'elle eût évidemment renfermé les carrés de $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$.

La méthode ordinaire conduit aux intégrales générales

$$\theta = A_1 \cos t\sqrt{r_1} + A_2 \cos t\sqrt{r_2} + B_1 \sin t\sqrt{r_1} + B_2 \sin t\sqrt{r_2},$$

$$\varphi = A_1\mu_1 \cos t\sqrt{r_1} + A_2\mu_2 \cos t\sqrt{r_2} + B_1\mu_1 \sin t\sqrt{r_1} + B_2\mu_2 \sin t\sqrt{r_2};$$

A_1, A_2, B_1, B_2 sont quatre constantes arbitraires; r_1, r_2 sont des quantités réelles et positives, racines de l'équation du deuxième degré en r,

$$(15) \qquad [(m+m')g - mar](g - br) - m'agr = 0,$$

et μ_1, μ_2 sont les valeurs correspondantes de μ, tirées de l'équation

$$(16) \qquad \mu = \frac{ar}{g - br}:$$

μ_1 et μ_2 sont de signes contraires, car l'une des racines de l'équation (15) est plus petite que $\frac{g}{b}$, et l'autre plus grande que $\frac{g}{b}$, puisque l'hypothèse $r = \frac{g}{b}$ rend le premier membre négatif. Comme on suppose qu'il n'y a pas de vitesses initiales, on doit avoir, pour $t = 0$,

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

ce qui entraîne

$$B_1 = 0 \quad \text{et} \quad B_2 = 0.$$

Soient α et β les valeurs initiales de θ et de φ, on aura

$$(17) \qquad A_1 + A_2 = \alpha, \quad A_1\mu_1 + A_2\mu_2 = \beta,$$

d'où l'on tirera les valeurs des constantes A_1 et A_2. Cela fait, le mouvement du système sera déterminé par les formules

$$(18) \qquad \begin{cases} \theta = A_1 \cos t\sqrt{r_1} + A_2 \cos t\sqrt{r_2}, \\ \varphi = A_1\mu_1 \cos t\sqrt{r_1} + A_2\mu_2 \cos t\sqrt{r_2}. \end{cases}$$

Dans le cas où les deux points matériels se trouveraient à l'origine du mouvement en ligne droite avec le point de suspension, on aurait

$$\alpha = \beta,$$

et, par suite,

$$A_1 = \frac{\alpha(1 - \mu_2)}{\mu_1 - \mu_2}, \quad A_2 = \frac{\alpha(\mu_1 - 1)}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Soit $\mu_1 > 0$, μ_2 sera < 0; il est aisé de voir, en outre, que μ_1 sera > 1, en sorte que les valeurs des constantes $A_1 A_2$ seront positives. Si l'on demandait quelle condition doit être remplie pour que *chacun des points m et m' oscille comme un pendule simple*, on poserait, dans les équations (17), $A_1 = 0$ ou bien $A_2 = 0$; soit $A_2 = 0$, il en résulte

$$A_1 = \alpha \quad \text{et} \quad \mu_1 = \frac{\beta}{\alpha},$$

et, par suite, l'équation (16) donne

$$r_1 = \frac{\beta g}{a\alpha + b\beta};$$

cette valeur, étant substituée dans l'équation (15), conduit à une relation entre les masses m, m', les distances a, b, et les écarts α, β, savoir :

$$(19) \qquad (m + m')a\alpha^2 + (m + m')(b - a)\alpha\beta - m'b\beta^2 = 0.$$

Telle est la condition cherchée : elle est impossible si $\alpha = \beta$, car l'hypothèse $\alpha = \beta$ réduit l'équation précédente à $mb = 0$, d'où $m = 0$ ou $b = 0$, ce qui veut dire que les deux points matériels se réduisent à un seul. Effectivement, les équations (18) donneraient, dans ce cas, pour θ et φ, des valeurs constamment égales entre elles,

$$\theta = \varphi = \alpha \cos t \sqrt{r_1},$$

c'est-à-dire que les deux points matériels demeureraient toujours en ligne droite avec le point de suspension, ce qui est évidemment impossible, à moins qu'ils ne se confondent.

Étant données les masses m, m' et les distances a, b, l'équation (19) fournira toujours une valeur réelle, positive et plus petite que 1, du rapport $\frac{\alpha}{\beta}$: soit par exemple $a = b$, on aura

$$\alpha = \beta \sqrt{\frac{m'}{m + m'}},$$

puis

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{m + m'}{m'}}$$

et

$$r_1 = \frac{g}{a\left(1 + \sqrt{\frac{m'}{m+m'}}\right)}.$$

En général, quand la condition (19) sera remplie, on aura

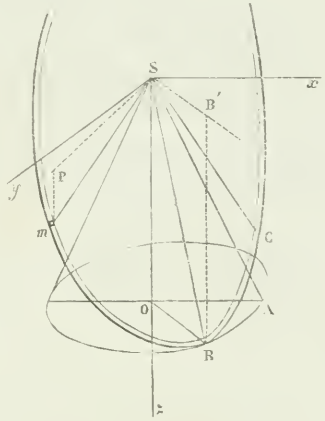
$$\theta = \alpha \cos t\sqrt{r_1}, \quad \varphi = \beta \cos t\sqrt{r_1};$$

les durées des petites oscillations seront donc les mêmes pour les deux pendules, mais leur amplitude sera différente; ils seront en même temps d'un même côté de la verticale, et se confondront en même temps avec elle.

Problème III. *Une roue circulaire porte, à sa circonférence, un canal annulaire, dans l'intérieur duquel on a introduit une sphère homogène pesante m, d'un très-petit diamètre, égal à celui du canal; cette roue s'appuie, par un point* B *de sa circonférence, sur un plan horizontal* AOB, *et, par son centre* S, *sur un axe fixe vertical* SO *incliné au plan de la roue d'un angle connu* OSB $= \alpha$. *On suppose qu'on fasse rouler la roue sur le plan horizontal, de manière que son point d'appui décrive un cercle de rayon* OB *avec une vitesse constante. Le cône droit dont l'axe est* SO *et le demi-angle au centre* α, *est ainsi touché successivement, suivant toutes ses génératrices, par le plan de la roue mobile.*

On demande les lois du mouvement du centre de la sphère (abstraction faite du frottement).

Fig. 4.



Une solution fausse de ce problème a été donnée dans le tome XIX des *Annales de Gergonne*, page 360. L'auteur prend pour expression de la force accélératrice effective qui anime le point m, la quantité $r\frac{d^2\theta}{dt^2}$, r étant le rayon de la roue, et θ l'angle que le rayon Sm fait avec un rayon fixe tracé dans le plan de la roue. Mais il y a là une erreur grave, dont l'effet n'est rien moins que de confondre l'élément de la *trajectoire réellement décrite* par le mobile, avec l'élément de la circonférence de la roue.

Prenons pour axe des z la verticale SO, et faisons passer le plan des zx par l'arête SA, suivant laquelle la roue mobile touchait le cône à l'origine du mouvement; au bout du temps t, soient SB l'arête de contact, SC la position qu'occupe à cette époque, sur le plan de la roue, le rayon qui coïncidait primitivement avec SA; Sm le rayon vecteur de la sphère : sa position sera déterminée par les angles

$$m\mathrm{SO} = \varphi \quad \text{et} \quad \mathrm{PS}x = \psi,$$

SP étant la projection horizontale de Sm; mais ces deux angles ne sont pas indépendants l'un de l'autre.

Soit θ l'angle variable CSm. Si l'on désigne par k la vitesse constante et donnée avec laquelle l'angle AOB est décrit, on aura

$$\text{angle AOB} = kt;$$

et comme il résulte de la nature du mouvement que

$$\text{arc AB} = \text{arc BC},$$

on en conclut

$$\text{angle BSC} = kt \sin\alpha$$

et

$$\text{angle } m\mathrm{SB} = \theta - kt \sin\alpha.$$

nous désignerons, pour abréger, ce dernier angle par ω.

$$(20) \qquad \omega = \theta - kt \sin\alpha.$$

Cela posé, il est facile d'exprimer les angles φ et ψ en fonction de ω

En effet, l'angle trièdre rectangle SOmB donne d'abord

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\omega. \tag{21}$$

Soit SB′ la projection horizontale de l'arête SB, on a

$$\psi = \mathrm{PSB'} + \mathrm{B'S}x = \mathrm{PSB'} + \mathrm{BOA} = \mathrm{PSB'} + kt;$$

PSB′ mesure l'angle dièdre qui a pour arête SO dans le trièdre déjà considéré. On a donc

$$\operatorname{tang}\mathrm{PSB'} = \frac{\operatorname{tang}\omega}{\sin\alpha}.$$

Par conséquent,

$$\psi = kt + \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\operatorname{tang}\omega}{\sin\alpha}\right). \tag{22}$$

A l'aide des formules (21) et (22), le problème est ramené à déterminer ω en fonction du temps. Comme nous n'avons ici qu'une *seule fonction variable* ω, il suffira d'une seule des équations (5)

$$\frac{d.\dfrac{d\mathrm{T}}{d\omega'}}{dt} - \frac{d\mathrm{T}}{d\omega} - \frac{d\mathrm{V}}{d\omega} = 0,$$

$$\mathrm{V} = mgr\cos\varphi = mgr\cos\alpha\cos\omega,$$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) = \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{d\varphi^2}{dt^2} + \sin^2\varphi\frac{d\psi^2}{dt^2}\right).$$

Si l'on substitue pour φ, $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\psi}{dt}$ leurs valeurs tirées des formules (21) et (22), on trouve que l'expression de T se réduit à cette forme très-simple

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}mr^2[\omega'^2 + 2\sin\alpha.k\omega' + (1 - \cos^2\alpha\cos^2\omega)k^2].$$

En définitive, l'équation du mouvement est

$$r\frac{d^2\omega}{dt^2} - r\cos^2\alpha\cos\omega\sin\omega\,k^2 + g\cos\alpha\sin\omega = 0;$$

en la multipliant par $2d\omega$, on l'intègre une première fois, et l'on a

$$r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + k^2r\cos^2\alpha\cos^2\omega - 2g\cos\alpha\cos\omega + c = 0, \tag{23}$$

c étant une constante arbitraire, qu'on déterminera d'après les circonstances initiales. Enfin, le calcul de ω en fonction de t est ramené à une quadrature

$$(24)\qquad t = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\pm \sqrt{r}\,.\,d\omega}{\sqrt{2g\cos\alpha\,.\cos\omega - k^2 r\cos^2\alpha\cos^2\omega - c}};$$

cette intégrale ne peut être calculée que par approximation, excepté pour certaines valeurs de c. Si l'on fait $k = 0$, ce qui revient à supposer la roue immobile, ω se confond avec θ, et l'on retrouve la formule ordinaire du pendule simple; seulement, la gravité g est ici remplacée par sa composante $g\cos\alpha$ dans le plan de la roue.

ω étant connu en fonction de t par l'intégrale précédente, les équations (20), (21) et (22) donnent θ, φ et ψ en fonction de la même variable. L'élimination de t entre les expressions de φ et ψ fournit ensuite l'équation polaire de la surface conique décrite par le rayon vecteur de la sphère. Si l'on transforme cette dernière équation en coordonnées rectilignes, au moyen des relations

$$z = r\cos\varphi, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{y}{x},$$

cette transformée, combinée avec l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

détermine la courbe à double courbure décrite par le centre de la sphère dans l'espace; enfin la vitesse de la sphère dans sa trajectoire sera également connue en fonction du temps par la formule

$$v^2 = r^2\left[\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + 2k\sin\alpha\frac{d\omega}{dt} + (1 - \cos^2\alpha\cos^2\omega)k^2\right].$$

Considérons le cas particulier où l'on aurait, à l'origine du mouvement,

$$\omega = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$\theta = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\theta}{dt} = k\sin\alpha.$$

C'est ce qui aura lieu si la sphère est primitivement en A dans le canal, et qu'elle y reçoive une vitesse initiale précisément égale à celle avec laquelle le rayon SA décrit la circonférence de la roue. Dans cette hypothèse, l'équation (23) donne

$$c = 2g\cos\alpha - k^2 r^2 \cos^2\alpha,$$

et cette valeur, substituée dans (24), conduit à l'intégrale

$$t = \sqrt{r}\int \frac{d\omega}{\sqrt{(1-\cos\omega)\left[k^2 r\cos^2\alpha(1+\cos\omega) - 2g\cos\alpha\right]}},$$

qu'on peut obtenir sous forme finie; car, en posant

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega = u, \quad k^2 r\cos^2\alpha - g\cos\alpha = a, \quad g\cos\alpha = b,$$

cette intégrale devient

$$t = \sqrt{r}\int \frac{du}{u\sqrt{a-bu^2}} = \sqrt{\frac{r}{a}}\, l\left(\frac{-\sqrt{a-bu^2}+\sqrt{a}}{u}\right),$$

et, en remplaçant u par sa valeur, on a

$$c' e^{t\sqrt{\frac{a}{r}}} = \frac{-\sqrt{a - b\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\omega} + \sqrt{a}}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega}.$$

Pour déterminer c', on fait, dans cette équation, $t = 0$ et $\omega = 0$, d'où l'on conclut $c' = 0$, et, par conséquent, *tang* $\frac{1}{2}\omega$ *sera constamment nul.*

Ainsi, dans l'état initial supposé, la sphère ne quitterait pas le plan horizontal, et décrirait le cercle AB avec une vitesse constante égale à $kr\sin\alpha$.

La formule (24) s'intégrerait encore complétement, si l'on supposait un état initial tel, que la constante c fût nulle, et qu'en outre le coefficient de $\cos\omega$ sous le radical fût égal à celui de $\cos^2\omega$. Soient θ_0 et $\frac{d\theta_0}{dt}$ les valeurs initiales de θ et de $\frac{d\theta}{dt}$. L'hypothèse dans laquelle nous nous plaçons entraîne les deux conditions

$$\left(\frac{d\theta_0}{dt} - k\sin\alpha\right)^2 = k^2\cos^2\alpha\cos\theta_0(1-\cos\theta_0),$$

$$2g = k^2 r\cos\alpha;$$

l'expression de dt prend alors la forme

$$dt = \pm \sqrt{\frac{r}{h}} \frac{d\omega}{\sqrt{2\cos\omega(1-\cos\omega)}},$$

en désignant, pour abréger, $g\cos\alpha$ par h.

Si l'on fait

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega = u,$$

il vient (en prenant d'abord le signe $+$, ce qui suppose que ω croisse avec t)

$$dt = \sqrt{\frac{r}{h}} \frac{du}{u\sqrt{1-u^2}},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u} = c' e^{t\sqrt{\frac{h}{r}}},$$

pour $t = 0$, on a

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega = u = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta_0;$$

donc

$$c' = \frac{1-\sqrt{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_0}}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta_0}.$$

Pour que cette valeur soit réelle, il faut que l'angle θ_0 soit au plus égal à $\frac{\pi}{2}$, et alors la constante c' sera plus petite que 1, ou au plus égale à 1, pour $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

Résolvons l'intégrale précédente par rapport à u, et remplaçons cette variable par $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega$, nous aurons

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega = \frac{2c' e^{t\sqrt{\frac{h}{r}}}}{c'^2 e^{2t\sqrt{\frac{h}{r}}}+1}.$$

En prenant le signe $-$ dans l'expression de dt, on arrive à la même intégrale.

La valeur de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega$ peut s'écrire $\frac{2M}{M^2+1}$ $\left(\text{en posant } c' e^{t\sqrt{\frac{h}{r}}} = M\right)$. La dérivée de cette quantité, par rapport à M, est $\frac{2(1-M^2)}{(M^2+1)^2}$; par conséquent, tant que l'on aura $M < 1$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega$ ira en croissant avec le temps. La variable ω atteindra donc un maximum pour la valeur de t qui satisfera à la condition

$$c' e^{t\sqrt{\frac{h}{r}}} = 1, \quad \text{d'où} \quad t\sqrt{\frac{h}{r}} = l\left(\frac{1}{c'}\right)$$

(on a vu ci-dessus que $\frac{1}{c'}$ est plus grand que 1) : à cette époque

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega = 1.$$

et, par suite,

$$\omega = \frac{\pi}{2}.$$

Ce maximum de ω s'accorde bien avec l'expression différentielle

$$dt = \sqrt{\frac{r}{h}}\,\frac{d\omega}{\sqrt{2\cos\omega(1-\cos\omega)}}.$$

Le temps continuant à croître, ω décroît, puisque la dérivée de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega$ devient négative, et ce décroissement continue indéfiniment, sans que ω se réduise à zéro autrement que pour $t = \infty$.

La formule (20) donnera l'expression de θ en fonction explicite de t

$$\theta = kt\sin\alpha + 2.\operatorname{arc}\left\{\operatorname{tang}\frac{2c' e^{t\sqrt{\frac{h}{r}}}}{c'^2 e^{2t\sqrt{\frac{h}{r}}}+1}\right\}:$$

mais la recherche des maxima et minima de cette variable serait compliquée.

Remarques sur une classe d'équations différentielles, à l'occasion d'un Mémoire de M. Jacobi *sur quelques séries elliptiques;*

Par J. LIOUVILLE.

1. Dans le Mémoire auquel nous faisons allusion et dont nous avons inséré la traduction au cahier de Juin, M. Jacobi a considéré certaines quantités dépendantes du module d'une fonction elliptique, et en différentiant il est arrivé à une équation de la forme

$$(A)\qquad z^2(zd^3z + 3dz\,d^2z)^2 = (d^2z)^2(16z^3d^2z + dx^2);$$

c'est l'équation marquée (7) dans son Mémoire : seulement nous avons mis z au lieu C, et dx au lieu de $d\log q$; dx est ici la différentielle constante. Cette équation peut encore s'écrire

$$(B)\qquad \frac{d.z^3\dfrac{d^2z}{dx^2}}{dx} = \frac{1}{z^2}\left(z^3\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(16z^3\frac{d^2z}{dx^2} + 1\right).$$

de sorte qu'elle est comprise dans l'équation générale

$$(1)\qquad \frac{d.\varphi(z)\dfrac{d^2z}{dx^2}}{dx} = f(z)\,F\left[\varphi(z)\frac{d^2z}{dx^2}\right].$$

Elle répond au cas particulier de

$$\varphi(z) = z^3,\quad f(z) = \frac{1}{z^2},\quad F(u) = u\sqrt{16u+1}.$$

Il suit de l'analyse de M. Jacobi que dans ce cas particulier la valeur de z dépend des fonctions elliptiques. C'est en partant, en effet, comme nous l'avons déjà dit, de fonctions de ce genre que M. Jacobi arrive à l'équation dont nous parlons. Il était curieux de se proposer

le problème inverse : *L'équation différentielle*

$$\text{(B)} \qquad \frac{d.z\,\dfrac{d^2z}{dx^2}}{dx} = \frac{1}{z^2}\left(z^3\,\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(16\,z^3\,\frac{d^2z}{dx^2}+1\right)$$

étant donnée, sans qu'on sache d'où elle vient, en trouver l'intégrale. C'est en résolvant ce problème que j'ai été conduit aux remarques concernant l'équation générale (1) qui font le sujet de cet article.

2. Comme la variable indépendante x n'entre dans l'équation générale (1) que par sa différentielle dx, on pourrait de suite, par un procédé connu, abaisser cette équation au second ordre. Il suffirait de poser

$$\frac{dz}{dx} = p,$$

et d'introduire dans le calcul cette quantité p en la regardant comme une fonction de z. On a ainsi

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dp}{dz}\,\frac{dz}{dx} = p\,\frac{dp}{dz}$$

et

$$\frac{d.\varphi(z)\,\dfrac{d^2z}{dx^2}}{dx} = p\,\frac{d.\varphi(z)\,p\,\dfrac{dp}{dz}}{dz},$$

ce qui transforme l'équation (1) dans celle-ci

$$(2) \qquad p\,\frac{d.\varphi(z)\,p\,\dfrac{dp}{dz}}{dz} = f(z)\,\mathrm{F}\left[\varphi(z)\,p\,\frac{dp}{dz}\right],$$

qui n'est plus que du second ordre.

L'équation (2) sera sans doute intégrable facilement et à vue pour ainsi dire dans de nombreux cas particuliers. Dans d'autres, elle sera aisée à ramener du moins au premier ordre. Mais en la particularisant pour le cas de l'équation (B), c'est-à-dire en prenant

$$\varphi(z) = z^3, \quad f(z) = \frac{1}{z^3}, \quad \mathrm{F}(u) = u\sqrt{16u+1},$$

je suis tombé sur une équation qui, traitée directement, m'a paru

offrir des difficultés; et sans pousser plus loin cette tentative, j'ai dirigé mes efforts d'un autre côté. J'ai trouvé ainsi une nouvelle manière de ramener l'équation (1) à une équation du second ordre, qui est linéaire pour le cas particulier considéré par M. Jacobi, mais qui, dans tous les cas, est de la forme

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = f(v, t),$$

et, par conséquent (d'après un théorème que nous devons encore à l'illustre géomètre allemand), s'intègre complétement dès qu'on a obtenu par un moyen quelconque une seule de ses intégrales premières. Il s'ensuit qu'une propriété semblable a lieu pour l'équation (1) et aussi pour l'équation (2) qui se déduit de l'équation (1) et qu'on peut y ramener.

5. Mais avant d'exposer cette méthode, je présenterai encore sur les équations (1) et (2) les observations suivantes.

En posant

$$\frac{dz}{\varphi(z)} = dt,$$

ce qui fournit t en z et z en t, on donne à l'équation (2) une forme plus simple, savoir,

$$p\frac{d.p\frac{dp}{dt}}{dt} = \psi(t)\,F\left(p\frac{dp}{dt}\right).$$

où j'ai écrit

$$f(z)\,\varphi(z) = \psi(t).$$

Cette équation ne contient plus qu'une seule fonction ψ au lieu des deux fonctions f et φ. Sa forme est, du reste, toujours celle de l'équation (2) : seulement la fonction φ y est en quelque sorte réduite à l'unité.

C'est la fonction f, au contraire, qu'on réduirait à l'unité en prenant

$$f(z)\,dz = dt.$$

Il est aisé d'en conclure que, sans ôter au fond rien de sa généra-

lité à l'équation (1), on pourrait remplacer par l'unité une des deux fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$ qu'elle contient. Mais comme la présence simultanée de ces deux fonctions ne complique nullement les calculs que nous allons avoir à faire, et comme il est très-commode de les avoir conservées toutes deux lorsqu'on en vient à appliquer la méthode à un exemple, puisque cela dispense de chasser, par une transformation préalable plus ou moins gênante, la fonction superflue, nous garderons l'équation (1) telle qu'elle est, et nous opérerons ainsi qu'il suit.

4. Je pose

$$\varphi(z)\frac{d^2z}{dx^2} = u$$

et

$$f(z)\,dx = dt.$$

u et t désignant de nouvelles variables. En ayant égard à ces valeurs, l'équation (1) se réduit a

$$\frac{du}{dt} = \mathrm{F}(u).$$

De là

$$t = \int \frac{du}{\mathrm{F}(u)},$$

ce qui donne t en u et inversement u en t. Nous regarderons donc désormais les variables u et t comme des fonctions connues l'une de l'autre, et nous supposerons $u = \varpi(t)$. A la variable t qui résulte d'une intégration s'ajoute naturellement une constante arbitraire; mais comme t n'est qu'une variable auxiliaire introduite par nous et qui à la fin doit disparaître par l'élimination, on pourra sans inconvénient donner à cette constante telle valeur particulière qu'on voudra.

Maintenant je cherche la valeur de z en fonction de t. On a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dz}{dt}f(z).$$

En faisant donc

$$f(z)\,dz = dv, \quad v = \int f(z)\,dz,$$

il vient

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dv}{dt}.$$

Par suite

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2 v}{dt^2} f(z).$$

et, par conséquent,

$$\varphi(z)\frac{d^2 z}{dx^2} \quad \text{ou} \quad u = \frac{d^2 v}{dt^2} f(z)\varphi(z).$$

Comme l'équation

$$v = \int f(z)\,dz$$

rend z fonction de v, j'écrirai

$$f(z)\varphi(z) = \psi(v),$$

et comme d'ailleurs

$$u = \varpi(t).$$

j'en conclurai

$$(3) \qquad \frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{\varpi(t)}{\psi(v)}.$$

Voilà l'équation du second ordre qui doit donner v ou $\int f(z)\,dz$, et, par conséquent, z en fonction de t. Une fois z connu en t, on exprimera à son tour x en t par la formule

$$x = \int \frac{dt}{f(z)}.$$

Enfin l'élimination de t donnera une équation entre x et z. Cette équation, qui contiendra une constante arbitraire ajoutée à x, plus les deux constantes résultant de l'intégration de l'équation (3), sera l'intégrale complète de l'équation (1). Ai-je besoin d'ajouter qu'en éliminant x entre cette intégrale et l'équation $p = \frac{dz}{dx}$, où z est la valeur résultant de l'intégrale même dont nous parlons, on aura une équation entre p et z, qui ne contiendra plus que deux constantes arbitraires, vu que la constante jointe à x s'élimine avec cette variable, et qui sera l'intégrale complète de l'équation (2).

5. Si l'on voulait, du reste, ramener directement l'équation (2) à l'équation (3), sans repasser par l'équation (1) d'où l'équation (2) a été tirée, voici comment il faudrait s'y prendre.

On poserait

$$f(z)\,dz = dv, \quad \varphi(z)\,p\,\frac{dp}{dz} = u, \quad \frac{dv}{p} = dt,$$

moyennant quoi l'équation (2) se réduirait à

$$\frac{du}{dt} = \mathrm{F}(u),$$

et donnerait

$$t = \int \mathrm{F}(u)\,du,$$

comme ci-dessus. Ensuite de

$$\frac{dv}{dt} = p,$$

on conclurait

$$\frac{d^2v}{dt} = \frac{dp}{dz}\,\frac{dz}{dt}.$$

Mais, d'après les équations écrites plus haut,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{p}{f(z)};$$

donc

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{p}{f(z)}\,\frac{dp}{dz} = \frac{u}{f(z)\,\varphi(z)}.$$

En représentant donc par $\varpi(t)$ la valeur de u en t que l'équation

$$t = \int \mathrm{F}(u)\,du$$

fait connaître, et par $\theta(v)$ la valeur de $f(z)\,\varphi(z)$ en v conclue de

$$v = \int f(z)\,dz,$$

on retrouvera finalement l'équation

$$(3) \qquad \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{\varpi(t)}{\theta(v)}.$$

Mais il me semble qu'on est conduit plus facilement et plus naturel-

lement à l'équation (3) en partant de l'équation (1) qu'en partant de l'équation (2).

6. Dans de certains cas particuliers, l'équation (2) pourra, du reste, se montrer plus apte à l'intégration que l'équation (3). Mais c'est sur l'équation (3) qu'on reconnaît généralement que *l'intégrale complète est toujours facile à obtenir par quadratures dès qu'on donne une seule intégrale première*, propriété qui s'étend dès lors aux équations (1) et (2), mais qui n'était pas connue pour elles, tandis que pour l'équation (3) elle résulte d'un théorème de M. Jacobi, applicable à toute équation de la forme

$$\frac{d^2v}{dt} = f(v, t), \tag{4}$$

et dont voici la démonstration.

Soit

$$\frac{dv}{dt} = \lambda(v, t, a)$$

une intégrale première de l'équation (4), a désignant la constante arbitraire. En différentiant et ayant égard à l'équation (4), on aura donc l'équation identique

$$f = \frac{d\lambda}{dv}\lambda + \frac{d\lambda}{dt},$$

laquelle, différentiée à son tour par rapport à a, donnera

$$\lambda\frac{d^2\lambda}{da\,dv} + \frac{d\lambda}{dv}\frac{d\lambda}{da} - \frac{d^2\lambda}{da\,dt} = 0.$$

C'est précisément la condition pour que

$$\frac{d\lambda}{da}(dv - \lambda\,dt)$$

soit une différentielle exacte. L'intégrale complète de l'équation (4) est donc

$$\int\left(\frac{d\lambda}{da}dv - \frac{d\lambda}{da}\lambda\,dt\right) = \text{constante}.$$

7. Revenons à l'équation (1) et à la transformation par laquelle on en tire l'équation (3). Cette transformation nous montre que l'équa-

tion (3) doit rester la même pour une infinité d'équations comprises dans le type (1), mais répondant à des formes diverses des fonctions f et φ, telles que pourtant on retrouve toujours la même fonction θ. On peut, en effet, faire varier f et φ, sans que θ varie, dans les relations

$$v = \int f(z)\,dz, \quad f(z)\,\varphi(z) = \theta(v),$$

c'est-à-dire dans l'équation résultante

$$f(z)\,\varphi(z) = \theta\left[\int f(z)\,dz\right].$$

Ainsi changez la fonction $f(z)$ à volonté, mais en même temps changez $\varphi(z)$ de manière à avoir toujours

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}\,\theta\left[\int f(z)\,dz\right],$$

et les équations différentielles que la formule (1), ou, si vous voulez, que les formules (1) et (2) vous fourniront par ces changements successifs, offriront toutes la même difficulté à l'intégration, et dépendront toutes de la même équation du second ordre

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{\varpi(t)}{\theta(v)},$$

en sorte que si l'intégrale complète, ou même si une seule intégrale première de l'une d'elles est connue, on en déduira immédiatement les intégrales complètes de tout le système.

8. L'équation (3) sera linéaire si l'on a

$$\theta(v) = \frac{1}{Av + B}. \tag{5}$$

Alors, en effet, elle deviendra

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = \varpi(t)\,(Av + B),$$

ou

$$\frac{d^2(Av + B)}{dt^2} = A\,\varpi(t)\,(Av + B), \tag{6}$$

équation qui s'intègre dès qu'on connaît une valeur particulière de $Av + B$ qui la vérifie.

La condition (5) exige que

$$f(z)\,\varphi(z) = \frac{1}{A\int f(z)\,dz + B},$$

elle est remplie lorsque l'on fait

$$\varphi(z) = z^3, \quad f(z) = \frac{1}{z^2},$$

car on a alors

$$\int f(z)\,dz = -\frac{1}{z}, \quad \varphi(z)\,f(z) = z,$$

et, par conséquent,

$$f(z)\,\varphi(z) = -\frac{1}{\int f(z)\,dz}.$$

Ce cas est celui de l'équation (B). Nous allons le traiter avec détail. Mais ajoutons encore que l'intégrale particulière dont on a besoin pour former l'intégrale complète de l'équation (6) peut s'obtenir soit à l'inspection de cette équation, soit par la connaissance antérieure d'une intégrale particulière de l'équation (1), pourvu toutefois que cette dernière ne rende pas constante la quantité

$$\varphi(z)\,\frac{d^2z}{dx^2},$$

que nous avons désignée par u et supposée variable.

Toute valeur de z satisfaisant à l'équation (1) et qui laisse u variable, conduit, en effet, évidemment à une valeur de v convenable.

9. Appliquons maintenant notre méthode générale à l'équation de M. Jacobi, mise sous la forme

$$\text{(B)} \qquad \frac{d.z\,\dfrac{d^2z}{dx^2}}{dx} = \frac{1}{z^2}\left(z^3\,\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(16\,z^3\,\frac{d^2z}{dx^2} + 1\right).$$

Il faut poser d'abord (car à cause de l'importance de l'exemple je reprends le calcul en entier)

$$z^3\,\frac{d^2z}{dx^2} = u, \quad \frac{dx}{z^2} = dt$$

moyennant quoi l'équation (B) devient

$$\frac{du}{dt} = u\sqrt{16u+1},$$

et fournit

$$t = \int \frac{du}{u\sqrt{16u+1}} = -\int \frac{d\frac{1}{u}}{\sqrt{\left(\frac{1}{u}+8\right)^2 - 64}},$$

par conséquent,

$$t - \varepsilon = -\log\left[\frac{1}{u} + 8 + \sqrt{\left(\frac{1}{u}+8\right)^2 - 64}\right],$$

ε étant une constante à laquelle on donnera plus tard telle valeur qu'on voudra. De là résulte

$$\frac{1}{u} + 8 + \sqrt{\left(\frac{1}{u}+8\right)^2 - 64} = e^{-(t-\varepsilon)}.$$

En multipliant le premier membre par

$$\frac{1}{u} + 8 - \sqrt{\left(\frac{1}{u}+8\right)^2 - 64},$$

on a 64 pour produit. Donc

$$\frac{1}{u} + 8 - \sqrt{\left(\frac{1}{u}+8\right)^2 - 64} = 64e^{t-\varepsilon}.$$

Par suite,

$$2\left(\frac{1}{u}+8\right) = e^{-(t-\varepsilon)} + 64e^{t-\varepsilon},$$

ou bien encore

$$\frac{2}{u} = \left(8e^{\frac{t-\varepsilon}{2}} - e^{-\frac{t-\varepsilon}{2}}\right)^2.$$

Je dispose maintenant de la constante ε, et je la prends telle que

l'on ait

$$e^{\frac{t}{2}} = \sqrt{-8}.$$

J'obtiens ainsi cette valeur définitive

$$(C) \qquad u = -\frac{1}{4\left(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}\right)^2}.$$

Cherchons maintenant à avoir z en t. On a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dt},$$

c'est-à-dire

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{dv}{dt},$$

en posant

$$\frac{1}{z} = v.$$

Il vient ensuite

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{d^2v}{dt^2}\frac{1}{z^2}.$$

Donc

$$z^3\frac{d^2z}{dx^2} \quad \text{ou} \quad u = -z\frac{d^2v}{dt^2} = -\frac{1}{v}\frac{d^2v}{dt^2},$$

et de là résulte, eu égard à la valeur de u,

$$(D) \qquad \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{v}{4\left(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}\right)^2}.$$

10. Toute la difficulté de l'équation qui nous est proposée roule sur l'équation (D). Or l'intégrale de cette équation a été donnée par M. Besge. M. Besge, en effet, a démontré (tome XI de ce Journal, page 96), que par un changement de variable indépendante l'équation (D) se transforme dans l'équation fameuse à laquelle satisfont les fonctions elliptiques completes de première espece à modules com-

plémentaires. Mais en laissant même de côté la remarque de M. Besge et sans vouloir tirer aucun secours de la théorie des fonctions elliptiques, j'observe qu'en faisant

$$e^t = \frac{\zeta}{1-\zeta},$$

c'est-à-dire

$$t = \log \frac{\zeta}{1-\zeta},$$

on change l'équation (D) en celle-ci

$$(\zeta - \zeta^2)\frac{d^2 v}{d\zeta^2} + (1 - 2\zeta)\frac{dv}{d\zeta} - \frac{v}{4} = 0,$$

laquelle est comprise, comme cas très-particulier, dans l'équation

$$(m\zeta^2 + n\zeta + p)\frac{d^2 v}{d\zeta^2} + (q\zeta + r)\frac{dv}{d\zeta} + sv = 0,$$

dont on peut toujours trouver l'intégrale à l'aide des différentielles à indices quelconques, ainsi que je l'ai prouvé dans le XXIe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. Il ne reste donc aucune difficulté relativement à l'intégration de l'équation (D). Mais voyons la forme de l'intégrale et continuons notre calcul.

11. Soit $v_1(t)$ ou simplement v_1 une valeur particulière quelconque de v satisfaisant à l'équation (1). On en conclura

$$v_1 \frac{d^2 v}{dt^2} - v\frac{d^2 v_1}{dt^2} = 0,$$

d'où

$$v_1 \frac{dv}{dt} - v\frac{dv_1}{dt} = \text{constante}.$$

Soit $v_2(t)$ ou v_2 une seconde valeur particulière de v telle que la constante ne soit pas nulle, telle, par exemple, que l'on ait

$$v_1 \frac{dv_2}{dt} - v_2\frac{dv_1}{dt} = 1.$$

L'intégrale complete de l'équation (D) sera

$$v = \alpha v_1 + \beta v_2.$$

α et β étant des constantes arbitraires. De là

$$z = \frac{1}{v} = \frac{1}{\alpha v_1 + \beta v_2}.$$

De plus, on aura

$$v \frac{dv_2}{dt} - v_2 \frac{dv}{dt} = \alpha,$$

d'où

$$d \frac{v_2}{v} = \frac{\alpha\, dt}{v^2}.$$

En se rappelant que

$$dx = z^2 dt = \frac{dt}{v^2},$$

on en conclura donc

$$dx = \frac{1}{\alpha} d \frac{v_2}{v},$$

d'où

$$x - h = \gamma + \frac{v_2}{\alpha(\alpha v_1 + \beta v_2)},$$

h étant une constante déterminée à volonté et γ une troisieme constante arbitraire.

Ainsi l'intégrale complete de l'équation (B) résulte de l'élimination de t entre les deux équations

$$(E) \quad \begin{cases} z = \dfrac{1}{\alpha v_1(t) + \beta v_2(t)}, \\ x - h = \gamma + \dfrac{v_2(t)}{\alpha[\alpha v_1(t) + \beta v_2(t)]}. \end{cases}$$

12. Les équations (E) se changent aisément dans celles-ci

$$\frac{z}{\alpha(x - h - \gamma)} = \frac{1}{v_2(t)},$$

$$\frac{\alpha(x - h - \gamma)}{1 - \alpha\beta(x - h - \gamma)} = \frac{v_2(t)}{v_1(t)}.$$

Si donc on représente par

$$z_1 = \frac{1}{v_1}\Psi(x_1)$$

le résultat de l'élimination de t entre les deux équations

$$z_1 = \frac{1}{v_2(t)}, \quad x_1 = \frac{v_2(t)}{v_1(t)},$$

on aura, pour l'intégrale complète de l'équation (B),

$$(F) \qquad z = \frac{1-\alpha\beta(x-h-\gamma)}{\alpha}\Psi\left[\frac{\alpha^2(x-h-\gamma)}{1-\alpha\beta(x-h-\gamma)}\right].$$

A cause de la présence de h et parce que $v_1(t)$ est une intégrale particulière quelconque de l'équation (D), on aura une valeur particulière quelconque de z en prenant $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, ce qui donne

$$z = \Psi(x-h).$$

Je poserai

$$\Psi(x-h) = \Phi(x),$$

et de la sorte

$$z = \Phi(x)$$

représentera une intégrale particulière quelconque de l'équation (B). Pour repasser de là à l'intégrale complète, j'observerai que

$$\Psi(x) = \Phi(x+h).$$

et par la formule (F) j'en conclurai cette valeur générale de z

$$z = \frac{1-\alpha\beta(x-h-\gamma)}{\alpha}\Phi\left[\frac{\alpha^2(x-h-\gamma)}{1-\alpha\beta(x-h-\gamma)}+h\right].$$

Mais pour me débarrasser de la quantité h, et aussi pour arriver à la même formule que M. Jacobi, je pose encore

$$1+\alpha\beta(h+\gamma) = a'\alpha, \quad \beta = -\sqrt{-1}\,b,$$

ce qui rendra le facteur de la fonction Φ égal à $a' - \sqrt{-1}\,bx$. La

quantité sous le signe Φ peut s'écrire ainsi

$$\frac{(\alpha^2 - h\alpha\beta)x - \alpha^2(h+\gamma) + h[1 + \alpha\beta(h+\gamma)]}{1 + \alpha\beta(h+\gamma) - \alpha\beta x}$$

c'est-à-dire

$$\frac{(\alpha + hb\sqrt{-1})x - \alpha(h+\gamma) + ha'}{a' + \sqrt{-1}\,bx}.$$

Soit donc

$$\alpha + hb\sqrt{-1} = a, \quad ha' - \alpha(h+\gamma) = \sqrt{-1}\,b',$$

et il nous viendra

$$(G) \qquad z = (a' + \sqrt{-1}\,bx)\,\Phi\left(\frac{ax + \sqrt{-1}\,b'}{a' + \sqrt{-1}\,bx}\right).$$

Trois des constantes a, a', b, b' sont arbitraires, mais la quatrième dépend des trois autres.

En effet, à cause de $\beta = \sqrt{-1}\,b$, l'équation

$$1 + \alpha\beta(h+\gamma) = a'\alpha$$

donne

$$\alpha(h+\gamma) = \frac{1 - a'\alpha}{b\sqrt{-1}};$$

l'équation

$$\alpha + hb\sqrt{-1} = a$$

donne d'autre part

$$h = \frac{a - \alpha}{b\sqrt{-1}}.$$

Substituons ces valeurs de h et $h + \gamma$ dans

$$ha' - \alpha(h - \gamma) = \sqrt{-1}\,b',$$

et il nous viendra

$$\frac{a'a - \alpha}{b\sqrt{-1}} - \frac{1 - a'\alpha}{b\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\,b'$$

d'où

$$aa' + bb' = 1.$$

On verra que ces résultats coïncident avec ceux de M. Jacobi, si l'on se rappelle que la quantité désignée par y dans le Mémoire de l'illustre auteur est égale à $z^{-\frac{1}{2}}$, en sorte que $z = \frac{1}{y^2}$.

13. On se souvient que, sans rien perdre de sa généralité, l'équation (1) peut être réduite à

$$\frac{d.\varphi(z)\frac{d^2z}{dx^2}}{dx} = \mathrm{F}\left[\varphi(z)\frac{d^2z}{dx^2}\right].$$

Mais cette dernière n'est qu'un cas très-particulier de la suivante:

$$(\alpha)\qquad \frac{d.\varphi(x, z)\frac{d^2z}{dx^2}}{dx} = \mathrm{F}\left[x, \varphi(x, z)\frac{d^2z}{dx^2}\right],$$

dont il est bon de dire aussi un mot.

Posons

$$\varphi(x, z)\frac{d^2z}{dx^2} = u,$$

et nous aurons d'abord à intégrer l'équation du premier ordre

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{F}(x, u).$$

Soit

$$u = \varpi(x)$$

le résultat de cette intégration; il ne restera plus à traiter qu'une équation du second ordre,

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\varpi(x)}{\varphi(x, z)},$$

du genre de celles dont on a parlé n° 6, et qui s'intègrent complétement dès qu'on en donne une seule intégrale première.

14. On pourrait considérer encore, au lieu d'une seule équa-

tion (α), un systeme d'équations simultanées, tel que

$$\frac{d.\varphi_1 \frac{d^2 z_1}{dx^2}}{dx} = F_1\left(x, \varphi_1 \frac{d^2 z_1}{dx^2}, \ldots, \varphi_n \frac{d^2 z_n}{dx^2}\right),$$

$$\frac{d.\varphi_2 \frac{d^2 z_2}{dx^2}}{dx} = F_2\left(x, \varphi_1 \frac{d^2 z_1}{dx^2}, \ldots, \varphi_n \frac{d^2 z_n}{dx^2}\right),$$

. . . . . .

$$\frac{d.\varphi_n \frac{d^2 z_n}{dx^2}}{dx} = F_n\left(x, \varphi_1 \frac{d^2 z_1}{dx^2}, \ldots, \varphi_n \frac{d^2 z_n}{dx^2}\right),$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ étant des fonctions de x, $z_1, \ldots, z_n$. On poserait alors

$$\varphi_1 \frac{d^2 z_1}{dx^2} = u_1, \ldots, \quad \varphi_n \frac{d^2 z_n}{dx^2} = u_n,$$

et cela conduirait à des conséquences utiles, surtout dans le cas où l'on supposerait généralement φ_m fonction de z_m et x seules. Mais je ne crois pas devoir insister sur ces remarques que le lecteur développera aisément de lui-même.

SECONDE NOTE

SUR

LA CONVERGENCE DES SÉRIES DU MOUVEMENT ELLIPTIQUE,

PAR M. PUISEUX,
Maître de Conférences à l'École Normale.

Dans un précédent article de ce Journal (Février 1849), je me suis proposé de démontrer que la limite des valeurs de l'excentricité, pour lesquelles les séries du mouvement elliptique des planètes restent convergentes, est un minimum dans le cas où l'anomalie moyenne est égale à 90 degrés. J'ignorais alors que cette question eût déjà été résolue par M. Cauchy dans un Mémoire sur le calcul des limites, qui fait partie des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* (année 1841). M. Cauchy est encore revenu sur ce sujet dans une de ses dernières leçons à la Faculté des Sciences de Paris, et il a donné du théorème dont il s'agit une démonstration à laquelle j'étais parvenu; je vais essayer, avec l'autorisation de l'illustre professeur, de l'exposer ici.

En conservant les notations adoptées à la page 35 de ce volume, il s'agit de déterminer, entre les limites zéro et π, la valeur réelle de ζ qui rend minimum le plus petit module de x pour lequel on a à la fois les deux équations

$$(1)\qquad y - x\sin y = \zeta,$$

$$(2)\qquad 1 - x\cos y = 0.$$

Nous établirons d'abord la proposition suivante :

Soit Z une fonction imaginaire de la variable réelle z; le module de Z croît ou décroît, lorsque z augmente, suivant que la partie réelle de l'expression $\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz}$ *est positive ou négative.*

En effet, appelons S le logarithme du module de Z, de sorte que ce module augmente ou diminue en même temps que S; soit de plus, P un angle réel: nous pourrons faire

$$Z = e^{S + P\sqrt{-1}}.$$

Différentions par rapport à z les deux membres de cette égalité; puis divisons-les par Z, il viendra

$$\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz} = \frac{dS}{dz} + \frac{dP}{dz}\sqrt{-1}.$$

On voit par là que $\frac{dS}{dz}$ est égal à la partie réelle de $\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz}$, et qu'ainsi, z augmentant, S croît ou décroît suivant que cette partie réelle est positive ou négative.

De cette proposition résulte immédiatement le corollaire suivant:

Les valeurs de z pour lesquelles le module de Z est un maximum ou un minimum annulent la partie réelle de l'expression $\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz} = 0$, et il y a maximum ou minimum, suivant que la partie réelle de $\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz}\right)$ est négative ou positive.

Revenons maintenant aux équations (1) et (2). En vertu de ces équations, x est une fonction de la variable réelle ζ; les valeurs de ζ qui rendent le module de x maximum ou minimum annulent donc la partie réelle de $\frac{1}{x}\frac{dx}{d\zeta}$. Mais les mêmes équations différentiées par rapport à ζ nous donnent

$$-\sin y\frac{dx}{d\zeta} = 1, \quad x\sin y\frac{dy}{d\zeta} - \cos y\frac{dx}{d\zeta} = 0;$$

d'où

$$\frac{dx}{d\zeta} = -\frac{1}{\sin y}, \quad \frac{dy}{d\zeta} = -\frac{\cos y}{x\sin^2 y} = -\frac{1}{x\sin^2 y} = -\frac{1}{y-\zeta},$$

et, par conséquent,

$$(3) \qquad \frac{1}{x}\frac{dx}{d\zeta} = -\frac{1}{x\sin y} = -\frac{1}{y-\zeta}.$$

Pour que la partie réelle de $\frac{1}{x}\frac{dx}{d\zeta}$ soit nulle, on voit que celle de $y-\zeta$ doit l'être aussi, c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$y=\zeta+\rho\sqrt{-1},$$

ρ désignant une quantité réelle. Cette valeur étant substituée dans l'équation

$$(4)\qquad (y-\zeta)\cos y-\sin y=0,$$

qui résulte de l'élimination de x entre les équations (1) et (2), il viendra

$$\rho\sqrt{-1}\cos(\zeta+\rho\sqrt{-1})-\sin(\zeta+\rho\sqrt{-1})=0,$$

ou bien

$$\begin{aligned}&\left[\rho\sqrt{-1}\cos(\rho\sqrt{-1})-\sin(\rho\sqrt{-1})\right]\cos\zeta\\ &=\left[\rho\sqrt{-1}\sin(\rho\sqrt{-1})+\cos(\rho\sqrt{-1})\right]\sin\zeta.\end{aligned}$$

Le premier membre contenant le facteur $\sqrt{-1}$, tandis que le second membre est réel, chacun d'eux doit être nul séparément; ainsi, pour que le module de x soit maximum ou minimum, il faut qu'on ait à la fois

$$(5)\qquad \begin{cases}\left[\rho\sqrt{-1}\cos(\rho\sqrt{-1})-\sin(\rho\sqrt{-1})\right]\cos\zeta=0,\\ \left[\rho\sqrt{-1}\sin(\rho\sqrt{-1})+\cos(\rho\sqrt{-1})\right]\sin\zeta=0.\end{cases}$$

La quantité $\rho\sqrt{-1}\cos(\rho\sqrt{-1})-\sin(\rho\sqrt{-1})$ pouvant se mettre sous la forme

$$\rho\sqrt{-1}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\rho^2}{1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{\rho^4}{1.2.3}+\frac{1}{7}\cdot\frac{\rho^6}{1.2\ldots.6}+\ldots\right),$$

on voit qu'elle ne sera pas nulle, à moins que ρ ne soit nul : les deux facteurs

$$\rho\sqrt{-1}\cos(\rho\sqrt{-1})-\sin(\rho\sqrt{-1}),$$
$$\rho\sqrt{-1}\sin(\rho\sqrt{-1})+\cos(\rho\sqrt{-1}),$$

ne peuvent donc être nuls à la fois; il en est de même de $\sin\zeta$ et de $\cos\zeta$. Par conséquent, pour que les équations (5) soient satisfaites,

il faut qu'on ait

$$\rho\sqrt{-1}\cos(\rho\sqrt{-1}) - \sin(\rho\sqrt{-1}) = 0, \quad \sin\zeta = 0;$$

ou bien

$$\rho\sqrt{-1}\sin(\rho\sqrt{-1}) + \cos(\rho\sqrt{-1}) = 0, \quad \cos\zeta = 0.$$

La deuxième hypothèse nous donne $\zeta = \frac{\pi}{2}$, et l'équation qui détermine ρ pouvant être mise sous la forme

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho^2}{1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\rho^4}{1.2.3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{\rho^6}{1.2.3.4.5} + \cdots = 1,$$

on en conclut $\rho = \pm 1,1996\ldots$; l'équation (4) nous donne ensuite

$$\cos^2 y = \frac{1}{(y-\zeta)^2+1} = \frac{1}{1-\rho^2},$$

et, par conséquent,

$$x^2 = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 - \rho^2, \quad x = \pm\sqrt{\rho^2-1}\sqrt{-1} = \pm 0,662\ldots\sqrt{-1}.$$

Pour savoir si ce nombre 0,662... est un maximum ou un minimum du module de x, il faut déterminer le signe de la partie réelle de l'expression $\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{1}{x}\frac{dx}{d\zeta}\right)$: or il suit de l'équation (3)

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{1}{x}\frac{dx}{d\zeta}\right) = \frac{1}{(y-\zeta)^2}\left(\frac{dy}{d\zeta} - 1\right) = -\frac{(y-\zeta)^2+1}{(y-\zeta)^2} = \frac{\rho^2-1}{\rho^2}.$$

cette quantité est positive, puisque ρ surpasse l'unité : c'est donc un minimum qu'on vient de trouver pour le module de x.

On a vu qu'on satisfait aussi aux équations (5) en posant

$$\rho\sqrt{-1}\cos(\rho\sqrt{-1}) - \sin(\rho\sqrt{-1}) = 0, \quad \sin\zeta = 0.$$

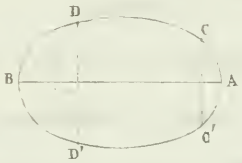
d'où il suit

$$\zeta = 0 \text{ ou } \pi, \quad \rho = 0, \quad y = 0 \text{ ou } \pi, \quad x = \pm 1.$$

Ici la valeur du module de x, à savoir l'unité, est nécessairement un maximum, puisque ce module est minimum pour $\zeta = \frac{\pi}{2}$, et ne

devient maximum ou minimum pour aucune autre valeur de ζ comprise entre 0 et π.

Ainsi la limite des valeurs de l'excentricité pour lesquelles les séries du mouvement elliptique restent convergentes, décroît de 1 à 0,662..., quand ζ augmente de zéro à $\frac{\pi}{2}$, et croît de 0.662... à 1, quand ζ augmente de $\frac{\pi}{2}$ à π.



Soit AB le grand axe d'une ellipse donnée : si l'excentricité est inférieure à 0.662..., les séries en question seront convergentes pour toute valeur de l'anomalie moyenne: mais il n'en sera plus de même si l'excentricité surpasse 0,662... Dans ce cas, il existera sur la courbe quatre points C, D, C', D', placés deux à deux symétriquement par rapport à l'axe AB, et tels, que les séries seront convergentes pour les parties CAC', DBD' de l'ellipse, et ne le seront pas pour les parties CD, C'D'. On voit aisément que les points C et D répondent à des valeurs supplémentaires de l'anomalie moyenne.

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. BESGE.

De la Hire a résolu jadis ce problème, du reste élémentaire, de trouver le lieu décrit par le sommet d'un angle, constant en grandeur, et dont les côtés touchent continuellement une conique donnée. La courbe est géométrique et du quatrième degré. On peut semblablement se proposer de trouver sur un ellipsoïde le lieu décrit par le sommet d'un angle de grandeur constante, dont les côtés sont deux lignes géodésiques continuellement tangentes à une ligne de courbure donnée. Le problème se résout ou ne peut plus facilement à l'aide de l'équation connue

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \beta$$

des lignes géodésiques. On peut supposer que le point (μ, ν) est le sommet mobile, et que l'équation que je viens d'écrire est celle d'un des côtés de l'angle. Alors il est clair que l'angle en question est exprimé, soit par $2i$, soit par $\pi - 2i$, et que, par suite, on a, suivant les cas, ou plutôt suivant la manière dont on veut que l'angle θ soit formé,

$$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \operatorname{tang} i = \frac{\sqrt{\mu^2 - \beta}}{\sqrt{\beta - \nu^2}},$$

ou

$$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \cot i = \frac{\sqrt{\beta - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - \beta}}.$$

On pourrait prendre aussi

$$\operatorname{tang} \theta = \pm \operatorname{tang} 2i = \mp 2 \frac{\sqrt{\mu^2 - \beta}\sqrt{\beta - \nu^2}}{\mu^2 + \nu^2 - 2\beta}.$$

Ici θ et β sont des constantes; μ et ν sont les coordonnées variables.

En faisant $\beta = b^2$, on aura le cas où les deux côtés de l'angle passent constamment par deux ombilics.

L'équation

$$\operatorname{tang} \theta = \mp 2 \frac{\sqrt{\mu^2 - \beta}\sqrt{\beta - \nu^2}}{\mu^2 + \nu^2 - 2\beta}$$

est la plus commode qu'on puisse employer pour arriver à l'équation en coordonnées rectangulaires qui, avec celle de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

détermine le lieu cherché. Elle donne

$$(\mu^2 + \nu^2 - 2\beta)^2 \operatorname{tang}^2 \theta = 4\beta(\mu^2 + \nu^2) - 4\mu^2\nu^2 - 4\beta^2.$$

On n'a donc plus qu'à substituer pour $\mu^2 + \nu^2$ et $\mu^2\nu^2$ leurs valeurs, savoir,

$$\mu^2 + \nu^2 = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2 - \rho^2, \quad \mu^2\nu^2 = \frac{b^2c^2x^2}{\rho^2},$$

ce qui conduit à une équation du quatrième degré comme dans le cas du plan.

REMARQUES

SUR QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES;

PAR M. OSSIAN BONNET.

On connaît le théorème suivant dû à l'illustre Abel et si utile dans la théorie des séries :

$$(1) \qquad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots, \quad a_n, \ldots,$$

représentant n nombres réels quelconques, et

$$(2) \qquad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \ldots, \quad \varepsilon_n, \ldots,$$

n autres nombres positifs et décroissants; si pour toutes les valeurs entières de p depuis 1 *jusqu'à n, on a*

$$A < a_1 + a_2 + \ldots + a_p < B.$$

on aura aussi pour les mêmes valeurs de p,

$$A\varepsilon_1 < a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots + a_p\varepsilon_p < B\varepsilon_1.$$

La démonstration de ce théorème ne reposant nullement sur ce que p et n sont finis, on peut supposer ces nombres infinis, deux termes consécutifs quelconques des suites (1) et (2) ayant alors généralement une différence infiniment petite; on obtient ainsi cet autre théorème très-facile à établir en toute rigueur :

THÉORÈME I. *Si l'intégrale définie*

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx,$$

dans laquelle $\varphi(x)$ *représente une fonction finie quelconque, reste*

constamment comprise entre A *et* B *quand* x *varie de* a *à* b. *l'intégrale*

$$\int_a^x f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

dans laquelle $f(x)$ *est une fonction constamment positive et décroissante, reste comprise pour les mêmes valeurs de* x *entre*

$$\mathrm{A}f(a) \quad \text{et} \quad \mathrm{B}f(a).$$

Ce nouveau théorème, ou plutôt ce cas particulier du théorème d'Abel, a peut-être été remarqué, mais ce que l'on n'a pas suffisamment montré, je le crois du moins, c'est qu'il peut donner la clef d'un grand nombre de difficultés relatives aux intégrales définies dans lesquelles la limite supérieure est ∞.

Pour le faire voir, observons d'abord qu'on en déduit la conséquence suivante :

Théorème II. *Si une intégrale définie de la forme*

$$\int_a^\infty m^x f(x)\,dx,$$

et que j'appellerai $\mathrm{F}(m)$, *est finie et déterminée pour une certaine valeur* m_1 *de* m, *cette même intégrale sera finie et déterminée pour toute autre valeur* m_2 *moindre que* m_1, *et la différence* $\mathrm{F}(m_1) - \mathrm{F}(m_2)$ *sera infiniment petite avec* $m_1 - m_2$; *de manière que si l'on est parvenu à déterminer la valeur* $\mathrm{F}(m)$ *de l'intégrale pour les valeurs de* m *inférieures à un nombre donné* μ, *pour avoir la valeur de cette intégrale correspondante à* $m = \mu$, *il suffira de prendre la limite vers laquelle tendra* $\mathrm{F}(m)$ *quand* m *tendra vers* μ; *la seule condition exigée pour l'exactitude de cette méthode est que l'intégrale proposée soit finie et déterminée pour* $m = \mu$.

Ce résultat s'établit de la même manière que le suivant dont il est le correspondant et qui est relatif aux séries :

Si une série

$$\mathrm{F}(m) = a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \ldots + a_p m^p + \ldots.$$

ordonnée suivant les puissances entières et positives d'une lettre m, *est*

convergente pour une valeur m_1 de cette lettre, elle est aussi convergente pour une autre valeur m_2 plus petite que m_1, et la différence $F(m_1) - F(m_2)$ *des sommes de la série est infiniment petite avec* $m_1 - m_2$. (*Voyez* le Mémoire d'Abel sur le développement du binôme.)

On déduit encore du théorème I d'autres conséquences qui peuvent être utiles dans différentes circonstances; mais on les trouvera sans peine, car elles sont analogues à celles qu'on déduit du théorème d'Abel et qui sont relatives aux séries. Bornons-nous à la précédente.

On conçoit immédiatement tout le parti qu'on peut retirer de cette propriété.

Ainsi, par exemple, on a

$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}dx = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^a}\right)^x \frac{\sin bx}{x}dx = \text{arc tang}\,\frac{b}{a},$$

et cela, pour toutes les valeurs positives de a ou pour toutes les valeurs moindres que 1 de $\frac{1}{e^a}$; faisons

$$a = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{e^a} = 1,$$

l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}dx,$$

étant finie et déterminée, comme on le voit, en la décomposant de la manière suivante,

$$\int_0^{\frac{\pi}{b}} \frac{\sin bx}{x}dx + \int_{\frac{\pi}{b}}^{\frac{2\pi}{b}} \frac{\sin bx}{x}dx + \ldots + \int_{(i-1)\frac{\pi}{b}}^{i\frac{\pi}{b}} \frac{\sin bx}{x}dx + \ldots,$$

aura pour valeur la limite vers laquelle tend arc tang $\frac{b}{a}$ lorsque a s'approche de 0, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$.

On arrive ainsi très-simplement à un résultat qui n'est pas toujours démontré d'une manière suffisamment rigoureuse.

On peut de même établir tout à fait rigoureusement un grand nombre d'intégrales trouvées par Poisson dans le *Journal de l'École*

Polytechnique, par différentes méthodes qui ne sont pas à l'abri d'objections.

Ainsi, soit l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\,dx,$$

Poisson la trouve facilement, pour toute valeur de a différente de zéro, égale à

$$Ce^{-2a},$$

C étant indépendant de a; puis, pour déterminer cette constante C, il suppose

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

égale à ce que devient Ce^{-2a} pour $a=0$; cela n'est pas évident. Mais si l'on observe que

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\,dx=\int_0^\infty e^{-\frac{1}{x^2}-a^2x^2}\frac{dx}{x^2}=\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^{a^2}}\right)^{x^2}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2}\,dx,$$

on voit aisément, d'après le théorème II, un peu généralisé, que la valeur de cette intégrale pour $a=0$ est égale à la limite vers laquelle tend sa valeur générale quand a décroît.

Il est inutile d'insister davantage sur ce premier point, on comprend tout le parti qu'il est possible de retirer du théorème II et des théorèmes analogues qu'on déduit du théorème I.

Je passe à une autre application du théorème I. Je vais m'en servir pour démontrer que la limite vers laquelle tend

$$\int_0^h \frac{\sin nx}{x}\,\varphi(x)\,dx,$$

à mesure que n croît indéfiniment, est $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$.

Soit ε un nombre déterminé qu'on pourra supposer aussi petit qu'on voudra; décomposons l'intégrale proposée comme il suit,

$$\int_0^\varepsilon \sin nx\,\frac{\varphi(x)}{x}\,dx+\int_\varepsilon^h \sin nx\,\frac{\varphi(x)}{x}\,dx,$$

et considérons d'abord la seconde intégrale

$$\int_{\varepsilon}^{h} \sin nx \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Il est permis de supposer que $\varphi(x)$ varie toujours dans le même sens de ε à h; car si cette condition n'était pas remplie, il serait possible évidemment de décomposer l'intégrale en une série d'autres pour lesquelles elle le serait; de plus, on peut admettre que $\varphi(x)$ soit constamment positif et aille en diminuant ou en restant constant de ε à h: c'est ce que l'on voit immédiatement en mettant l'intégrale sous la forme

$$\pm \left\{ \int_{\varepsilon}^{h} \frac{\sin nx}{x} [C \pm \varphi(x)] dx \right\} \mp C \int_{\varepsilon}^{h} \frac{\sin nx}{x} dx,$$

C représentant un nombre positif supérieur à la valeur absolue de $\varphi(x)$ pour toutes les valeurs de x de ε à h, et le signe supérieur ou le signe inférieur étant adopté selon que $\varphi(x)$ augmente ou diminue de ε à h.

Cela posé, comme l'on a, quelles que soient les limites,

$$-\frac{2}{n} < \int_{\eta}^{\xi} \sin nx \, dx < \frac{2}{n},$$

et que $\varphi(x)$ est positif, constant ou décroissant de ε à h, et, par conséquent, $\frac{\varphi(x)}{x}$ positif et décroissant entre les mêmes limites, on aura aussi (théorème I),

$$-\frac{2}{n}\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} < \int_{\varepsilon}^{h} \sin nx \frac{\varphi(x)}{x} dx < \frac{2}{n}\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

cela prouve que la limite vers laquelle tend l'intégrale

$$\int_{\varepsilon}^{h} \frac{\sin nx}{x} \varphi(x) dx,$$

à mesure que n croît indéfiniment, est zéro.

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_{0}^{\varepsilon} \frac{\sin nx}{x} \varphi(x) dx.$$

Nous pouvons d'abord y supposer ε assez petit pour que $\varphi(x)$ varie dans le même sens pour toutes les valeurs de x de o à ε; admettons, de plus, que $\varphi(x)$ aille en diminuant : dans le cas contraire, il faudrait prendre l'intégrale

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\sin nx}{x} [-\varphi(x)]\, dx;$$

l'intégrale

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\sin nx\, dx}{x} \quad \text{ou} \quad \int_0^{n\varepsilon} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

étant, quels que soient ε et n, comprise entre o et $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx$, on aura (théorème I).

$$0 < \int_0^{\varepsilon} \frac{\sin nx}{x} [\varphi(x) - \varphi(\varepsilon)]\, dx < [\varphi(0) - \varphi(\varepsilon)] \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx;$$

car $\varphi(x) - \varphi(\varepsilon)$ est positif et décroissant pour les valeurs de x de o à ε. Mais ε étant suffisamment petit, $\varphi(0) - \varphi(\varepsilon)$ est aussi près que l'on veut de zéro, donc la limite vers laquelle tend

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\sin nx}{x} \varphi(x)\, dx,$$

à mesure que n augmente, est la même que celle de

$$\varphi(\varepsilon) \int_0^{\varepsilon} \frac{\sin nx}{x}\, dx \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2} \varphi(0).$$

Ce résultat, réuni à celui que l'on a obtenu plus haut, montre que la limite de

$$\int_0^{h} \varphi(x) \frac{\sin nx}{x}\, dx,$$

à mesure que n augmente, est $\frac{\pi}{2} \varphi(0)$.

Nous avons supposé $\varphi(x)$ continu dans le voisinage de la valeur o de x; dans le cas contraire, le raisonnement précédent prouve que la limite en question est $\frac{\pi}{2} \varphi(\varepsilon)$, ε étant infiniment petit et positif.

Ayant démontré que pour $n = \infty$,

$$(a) \qquad \int_0^h \frac{\sin nx}{x} \varphi(x)\, dx = \frac{\pi}{2} \varphi(0),$$

on peut conclure aussi

$$(b) \qquad \int_0^h \frac{\sin nx}{\sin x} \varphi(x)\, dx = \frac{\pi}{2} \varphi(0),$$

h étant du moins inférieur à $\frac{\pi}{2}$, il suffit de remplacer dans la première relation $\varphi(x)$ par $\frac{x}{\sin x} \varphi(x)$.

Des égalités (a) et (b) on déduit simplement les deux formules que Fourier a données pour représenter une fonction quelconque continue ou discontinue d'une variable x, par une intégrale définie double ou par une double série ordonnée suivant les sinus et les cosinus des multiples entiers positifs de x; ce qui précède fournit donc une démonstration rigoureuse de ces deux formules.

Je terminerai en faisant une remarque relativement à un procédé quelquefois employé pour déterminer la valeur de certaines intégrales; je veux parler de la méthode qui consiste à multiplier l'intégrale proposée par ce qu'elle devient quand on y remplace la variable x par y, puis à transformer l'intégrale double ainsi obtenue en substituant aux variables x et y, considérées comme des coordonnées rectangulaires, des coordonnées polaires r et ω. Cette méthode est employée ordinairement pour obtenir la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx,$$

et l'on admet que

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^r e^{-\rho^2} \rho\, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega.$$

Cette égalité n'est pas évidente, et on reconnaît même facilement qu'on ne peut être sûr de son exactitude que parce que l'intégrale définie

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

est finie et déterminée en vertu du décroissement seul de l'élément $e^{-x^2}dx$ à mesure que x augmente. En effet, la propriété qu'elle exprime est la correspondante de cette autre relative aux séries :

Si les deux séries

$$(1) \qquad v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots,$$

$$(2) \qquad v'_0 + v'_1 + v'_2 + v'_3 + \ldots,$$

sont convergentes, la série

$$V_0 + V_1 + V_2 + \ldots$$

dont le terme général est

$$V_m = v_0 v'_m + v_1 v'_{m-1} + v_2 v'_{m-2} + \ldots + v_m v'_0,$$

sera aussi convergente, et aura pour somme le produit des sommes des séries proposées.

Or cette seconde propriété s'établit aisément en supposant les séries (1), (2) convergentes indépendamment des signes, mais peut ne pas être vraie dans le cas contraire. Ajoutons, toutefois, qu'Abel a démontré que si la série

$$V_0 + V_1 + V_2 + \ldots$$

est convergente, elle ne peut avoir pour somme que le produit des sommes des séries (1) et (2), de manière que le procédé d'intégration cité plus haut sera encore applicable si l'intégrale du second membre est finie et déterminée.

MÉMOIRE

SUR

L'intégration des équations différentielles du mouvement d'un nombre quelconque de points matériels;

PAR J. LIOUVILLE [*].

1. Dans une Note qui fait partie des *Additions* à la *Connaissance des Temps* pour 1849 [**], j'ai montré comment on peut intégrer les équations différentielles du mouvement d'un point libre, dans un cas très-étendu qui comprend en particulier tout ce qu'Euler et Lagrange ont donné relativement au mouvement d'un mobile soumis à l'action de deux ou de trois centres fixes. Je vais appliquer ici la même analyse aux équations du mouvement d'un nombre quelconque de points matériels m, m', m'',... que d'abord je supposerai libres aussi. Ces points libres seront rapportés à trois axes Ox, Oy, Oz, rectangulaires ou obliques, comme on voudra; mais après avoir décomposé la force qui sollicite chaque point du système en trois autres, parallèlement à ces axes, nous admettrons que les valeurs de ces trois composantes s'expriment par les dérivées partielles, relatives aux trois coordonnées correspondantes du point, d'une certaine fonction donnée U des coordonnées x, y, z, x', y', z',... de tous les points m, m', m'',..., laquelle fonction restera la même pour tous ces points et ne dépendra pas du

[*] Ce Mémoire a déjà paru, il y a deux ans, dans la *Connaissance des Temps*. Comme il fait suite à des recherches insérées dans ce Journal et sur lesquelles nous aurons encore à revenir plus tard, nous avons cru devoir le reproduire ici.

[**] Voyez aussi les deux Mémoires *sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer*, insérés aux tomes XI et XII du *Journal de Mathématiques*. La Note citée n'est qu'un extrait du second de ces deux Mémoires.

temps. Les équations du mouvement seront ainsi :

$$(1)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dU}{dx}, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{dU}{dy}, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{dU}{dz}, \\ m'\dfrac{d^2x'}{dt^2} = \dfrac{dU}{dx'}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si les coordonnées sont rectangulaires, U désignera ce que M. Jacobi nomme la *fonction des forces*; et l'on voit que l'hypothèse où nous nous plaçons consiste alors à admettre que le principe des forces vives ait lieu. Si les coordonnées sont obliques, ce principe de mécanique cessera, en général, d'être applicable. Mais comme, dans ce second cas, la forme analytique des équations (1) se trouve être la même que dans le premier, la signification géométrique et dynamique des quantités dont les équations se composent étant seule changée, il est clair que la méthode même qui conduit à l'intégrale des forces vives dans le premier cas (et qui repose sur ce fait, qu'on obtient dans les deux membres une différentielle exacte, en ajoutant les équations (1) après les avoir multipliées par les facteurs respectifs $2dx$, $2dy$, etc.), conduira encore, dans le second cas, à une intégrale algébriquement semblable à celle-là; ce que l'on doit comprendre facilement sans qu'il soit nécessaire d'y insister.

2. Au reste, pour marquer mieux encore le point de vue purement analytique où nous voulons nous placer dans ce Mémoire, et aussi pour donner à nos calculs plus de symétrie et d'élégance, nous changerons un peu la forme des équations (1). Nous substituerons à ces équations (1) le système d'équations que voici :

$$(2)\quad \begin{cases} m_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \dfrac{dU}{dx_1}, \\ m_2\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = \dfrac{dU}{dx_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_i\dfrac{d^2x_i}{dt^2} = \dfrac{dU}{dx_i}, \end{cases}$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_i$ sont des constantes, et U une fonction des variables $x_1, x_2, \ldots, x_i$, mais non de la variable indépendante t. Dans la question de dynamique indiquée, l'indice i deviendra égal au triple du nombre des points mobiles, t désignera le temps; x_1, x_2, x_3 seront les coordonnées du premier point; x_4, x_5, x_6 celles du second; ...; x_{i-2}, x_{i-1}, x_i celles du dernier : de plus, on aura $m_1 = m_2 = m_3$, $m_4 = m_5 = m_6$, etc., et m_1, m_4, etc., seront les masses en mouvement. Mais on pourra, dans tous les cas, se débarrasser des coefficients $m_1, m_2, \ldots, m_i$, en remplaçant

$$x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_i$$

respectivement par

$$\frac{x}{\sqrt{m}}, \quad \frac{x}{\sqrt{m}}, \ldots, \quad \frac{x_i}{\sqrt{m_i}};$$

et l'on aura ainsi, au lieu du système des équations (2), le système, un peu plus simple,

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} = \dfrac{dU}{dx}, \\ \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = \dfrac{dU}{dx_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = \dfrac{dU}{dx_i}, \end{cases}$$

que j'emploierai désormais exclusivement.

3. D'après un théorème de M. Jacobi, l'intégration du système (3), composé de i équations différentielles ordinaires, dépend d'une solution Θ de l'équation aux différences partielles

$$(4) \qquad \left(\frac{d\Theta}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\Theta}{dx_i}\right)^2 = 2(U + h),$$

contenant, outre la constante arbitraire h, qui entre déjà dans l'équation (4), $i - 1$ autres constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$, distinctes de celle qu'on peut toujours introduire par simple addition dans la fonction Θ. Une telle solution étant trouvée, les intégrales du

On sait, de plus, que l'équation

$$(6)\quad \begin{cases} s^3 - s^2(A + A' + A'') - s(B''^2 - AA' + B'^2 - AA'' + B^2 - A'A'') \\ \qquad - (AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'') = 0 \end{cases}$$

a ses trois racines réelles, et que ces racines ont pour valeurs,

$$s' = \frac{H}{e^2}, \quad s'' = \frac{H}{f^2}, \quad s''' = \frac{H}{g^2},$$

en représentant par e^2, f^2 et g^2 les carrés des demi-axes de l'hyperboloïde [*].

Remarquons à présent que chacun des deux plans passant par un axe réel et un axe imaginaire coupe ce cône suivant deux de ses génératrices rectilignes, et que la tangente de la moitié de l'angle compris entre ces droites aura une valeur numérique égale à la longueur d'un des demi-axes de l'ellipse qu'il s'agissait de déterminer.

Mais l'équation (6) présentera deux cas distincts par rapport aux signes de ses trois racines. Elle pourra admettre deux racines positives et une négative, ou bien deux racines négatives et une positive. En désignant toujours par s', s'' les racines affectées du même signe, on aura en tous cas pour les valeurs des deux tangentes ou des deux axes de l'ellipse,

$$\frac{e}{g} = \left(-\frac{s'''}{s''}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{f}{g} = \left(-\frac{s'''}{s'}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Évaluons maintenant la quantité de lumière recueillie par la surface de cette ellipse, dont nous nommerons le grand axe $2a$, et le petit axe $2b$.

Soient ACB un quart d'ellipse, φ le point lumineux, l'intensité de la lumière au point P, dont les coordonnées rectangulaires sont x et y, ayant pour valeur $\rho \frac{\sin OP\varphi}{\overline{P\varphi}^2} = \frac{\rho}{\overline{P\varphi}^2}$; la quantité de lumière recueillie par l'élément $Pr_1 Rr_{11} = dx\,dy$ s'exprimera par $\frac{\rho\,dx\,dy}{\overline{P\varphi}^3}$. En

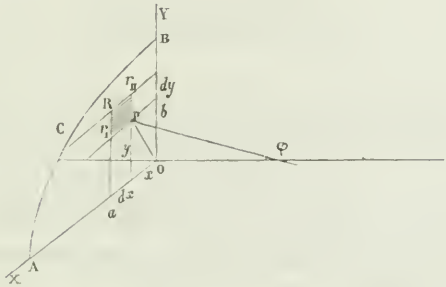
[*] Leroy, § 237.

la désignant par d^2X et substituant pour $P\varphi$ sa valeur, on aura

$$d^2X = \frac{\rho\, dx\, dy}{(1+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et, en posant

$$a\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} = f(y),$$



il viendra pour l'ellipse entière

$$X = 4\int_0^b dy \int_0^{f(y)} \frac{\rho\, dx}{(1+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

d'où l'on conclut, en intégrant,

$$\frac{X}{4\rho} = \int_0^b \frac{f(y)\, dy}{(1+y^2)\left[1+y^2+f(y)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{X}{4\rho} = a\int_0^b \frac{\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy}{(1+y^2)\left[1+a^2-(a^2-b^2)\frac{y^2}{b^2}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{X}{4\rho} = \frac{a}{(1+a^2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^b \frac{\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right) dy}{(1+y^2)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{a^2-b^2}{1+a^2}\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

quantités

$$\frac{d\Theta}{dx_1},\quad \frac{d\Theta}{dx_2},\ldots,\quad \frac{d\Theta}{dx_i}.$$

Il faut donc qu'on ait

$$\frac{dx_1}{dt}=\lambda\frac{d\Theta}{dx_1},\quad \frac{dx_2}{dt}=\lambda\frac{d\Theta}{dx_2},\ldots,\quad \frac{dx_i}{dt}=\lambda\frac{d\Theta}{dx_i},$$

λ étant un certain facteur commun.

Pour déterminer ce facteur, je différentie, par rapport à t, l'équation

$$\frac{d\Theta}{dh}=t+\varepsilon,$$

ce qui donne

$$\frac{d^2\Theta}{dhdx_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{d^2\Theta}{dhdx_2}\frac{dx_2}{dt}+\ldots+\frac{d^2\Theta}{dhdx_i}\frac{dx_i}{dt}=1,$$

et, par conséquent,

$$\lambda\left(\frac{d\Theta}{dx_1}\frac{d^2\Theta}{dhdx_1}+\frac{d\Theta}{dx_2}\frac{d^2\Theta}{dhdx_2}+\ldots+\frac{d\Theta}{dx_i}\frac{d^2\Theta}{dhdx_i}\right)=1.$$

Mais en différentiant l'équation aux différences partielles (4), par rapport à h, on trouve

$$\left(\frac{d\Theta}{dx_1}\frac{d^2\Theta}{dhdx_1}+\frac{d\Theta}{dx_2}\frac{d^2\Theta}{dhdx_2}+\ldots+\frac{d\Theta}{dx_i}\frac{d^2\Theta}{dhdx_i}\right)=1,$$

en sorte que le coefficient de λ est égal à l'unité. Donc aussi $\lambda=1$, et, par suite,

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{d\Theta}{dx_1},\quad \frac{dx_2}{dt}=\frac{d\Theta}{dx_2},\ldots,\quad \frac{dx_i}{dt}=\frac{d\Theta}{dx_i}.$$

On voit déjà par là que les équations (6) résultent des équations (5), par l'élimination des constantes arbitraires $\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_{i-1}, \varepsilon$. Il reste à prouver qu'en éliminant, en outre, $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_{i-1}, h$, on arrive aux équations différentielles (3).

Pour cela, je différentie, par rapport à t, les équations

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{d\Theta}{dx_1},\quad \frac{dx_2}{dt}=\frac{d\Theta}{dx_2},\ldots,\quad \frac{dx_i}{dt}=\frac{d\Theta}{dx_i},$$

ce qui donne, pour chaque indice μ,

$$\frac{d^2 x_\mu}{dt^2} = \frac{d^2\Theta}{dx_\mu dx_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{d^2\Theta}{dx_\mu dx_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{d^2\Theta}{dx_\mu dx_i}\frac{dx_i}{dt}.$$

d'où, en remplaçant les dérivées de $x_1, x_2, \ldots, x_i$ par leurs valeurs,

$$\frac{d^2 x_\mu}{dt^2} = \frac{d\Theta}{dx_1}\frac{d^2\Theta}{dx_\mu dx_1} + \frac{d\Theta}{dx_2}\frac{d^2\Theta}{dx_\mu dx_2} + \ldots + \frac{d\Theta}{dx_i}\frac{d^2\Theta}{dx_\mu dx_i}.$$

Le second membre est la dérivée partielle, par rapport à x_μ, de l'expression

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\Theta}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\Theta}{dx_i}\right)^2\right],$$

égale à $U + h$, d'après l'équation (4). On a donc

$$\frac{d^2 x_\mu}{dt^2} = \frac{dU}{dx_\mu};$$

et, en donnant à μ les valeurs successives $1, 2, \ldots, i$, on retrouve, comme nous l'avions annoncé, les équations différentielles (3).

5. Pour intégrer les équations différentielles (3), nous n'avons donc qu'à chercher une solution contenant $i - 1$ constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$, ou, comme on dit, une solution *complète* de l'équation aux différences partielles

$$(4) \qquad \left(\frac{d\Theta}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\Theta}{dx_i}\right)^2 = 2(U + h).$$

Or je me propose de montrer ici qu'on peut obtenir aisément une valeur de Θ convenable toutes les fois que U est de la forme

$$\begin{aligned} U = {} & \frac{f_1(\rho_1)}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)\ldots(\rho_1 - \rho_i)} \\ & + \frac{f_2(\rho_2)}{(\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 - \rho_3)\ldots(\rho_2 - \rho_i)} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{f_i(\rho_i)}{(\rho_i - \rho_1)(\rho_i - \rho_2)\ldots(\rho_i - \rho_{i-1})}, \end{aligned}$$

$f_1(\rho_1), f_2(\rho_2), \ldots, f_i(\rho_i)$ désignant des fonctions quelconques de leurs

variables respectives, et ces variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ représentant les i racines de l'équation

$$(7) \qquad \frac{x_1}{\rho - a_1} + \frac{x_2}{\rho - a_2} + \ldots + \frac{x_i}{\rho - a_i} = 1,$$

qui est de degré i par rapport à ρ, et où $a_1, a_2, \ldots, a_i$ sont des constantes auxquelles on peut donner une fois pour toutes telles valeurs qu'on voudra. En posant généralement

$$\varphi(\rho) = (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)\ldots(\rho - \rho_i), \quad \varphi'(\rho) = \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho},$$

la valeur de U à laquelle notre théorème s'applique s'exprimera plus simplement comme il suit :

$$U = \frac{f_1(\rho_1)}{\varphi'(\rho_1)} + \frac{f_2(\rho_2)}{\varphi'(\rho_2)} + \ldots + \frac{f_i(\rho_i)}{\varphi'(\rho_i)}.$$

Mais il faudra se souvenir que si les numérateurs $f_1(\rho_1)$, etc., sont des fonctions de la seule variable marquée entre parenthèses, il n'en est pas de même des dénominateurs : $\varphi'(\rho_1)$, par exemple, n'est pas une fonction de ρ_1 seule; on a

$$\varphi'(\rho_1) = (\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)\ldots(\rho_1 - \rho_i):$$

c'est une fonction de toutes les variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$.

6. On sait et il est facile de vérifier que les constantes $a_1, a_2, \ldots, a_i$, quand elles sont réelles et rangées dans un ordre de grandeurs croissantes entre $-\infty$ et $+\infty$, servent de limites aux racines $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$, qui sont dès lors toutes réelles aussi; la première racine ρ_1 est comprise entre a_1 et a_2, la seconde ρ_2 entre a_2 et $a_3, \ldots$, la dernière ρ_i entre a_i et $+\infty$.

Dans tous les cas, on forme aisément les expressions de $x_1, x_2, \ldots, x_i$ en $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$. Pour trouver x_1 par exemple, posons $\rho = a_1 + u$ dans l'équation (7), puis chassons les dénominateurs et faisons passer tous les termes dans un seul membre; enfin ordonnons par rapport aux puissances descendantes de u : en écrivant seulement le premier et le dernier terme, nous aurons

$$u^i + \ldots - (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_i)x_1^2 = 0.$$

La comparaison du dernier terme de cette équation avec le produit

$$(\rho_1 - a_1)(\rho_2 - a_1)\ldots(\rho_i - a_1)$$

des racines u ou $\rho - a_1$ donne donc

$$x_1^2 = \frac{(\rho_1 - a_1)(\rho_2 - a_1)(\rho_3 - a_1)\ldots(\rho_i - a_1)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\ldots(a_i - a_1)}.$$

On aura de même

$$x_2^2 = \frac{(\rho_1 - a_2)(\rho_2 - a_2)(\rho_3 - a_2)\ldots(\rho_i - a_2)}{(a_1 - a_2)(a_3 - a_2)\ldots(a_i - a_2)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_i^2 = \frac{(\rho_1 - a_i)(\rho_2 - a_i)(\rho_3 - a_i)\ldots(\rho_i - a_i)}{(a_1 - a_i)(a_2 - a_i)\ldots(a_{i-1} - a_i)}.$$

Les variables $x_1, x_2, \ldots, x_i$ s'exprimant ainsi au moyen de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$, on peut substituer à ces variables primitives $x_1, x_2, \ldots, x_i$ les variables nouvelles $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$. Il en résultera une transformation de l'équation aux différences partielles (4), qui nous fournira la démonstration de notre théorème. Mais pour effectuer commodément cette transformation, il faut chercher d'abord en $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i, d\rho_1, d\rho_2, \ldots, d\rho_i$ la valeur de

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_i^2.$$

Nous rappellerons donc le procédé connu à l'aide duquel le calcul dont nous parlons s'effectue rapidement.

7. En prenant la différentielle logarithmique de

$$x_1^2 = \frac{(\rho_1 - a_1)(\rho_2 - a_1)(\rho_3 - a_1)\ldots(\rho_i - a_1)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\ldots(a_i - a_1)},$$

on a

$$\frac{2\,dx_1}{x_1} = \frac{d\rho_1}{\rho_1 - a_1} + \frac{d\rho_2}{\rho_2 - a_1} + \ldots + \frac{d\rho_i}{\rho_i - a_1}.$$

d'où

$$dx_1 = \frac{x_1}{2}\left(\frac{d\rho_1}{\rho_1 - a_1} + \frac{d\rho_2}{\rho_2 - a_1} + \ldots + \frac{d\rho_i}{\rho_i - a_1}\right);$$

on aura de même

$$dx_2 = \frac{x_2}{2}\left(\frac{d\rho_1}{\rho_1 - a_2} + \frac{d\rho_2}{\rho_2 - a_2} + \ldots + \frac{d\rho_i}{\rho_i - a_2}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$dx_i = \frac{x_i}{2}\left(\frac{d\rho_1}{\rho_1 - a_i} + \frac{d\rho_2}{\rho_2 - a_i} + \ldots + \frac{d\rho_i}{\rho_i - a_i}\right).$$

En faisant la somme des carrés pour former la valeur de

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_i^2,$$

on trouvera donc des termes affectés de $d\rho_1^2, d\rho_2^2, \ldots, d\rho_i^2$, et d'autres où figureront les rectangles $d\rho_1 d\rho_2$, $d\rho_1 d\rho_3, \ldots$; mais les coefficients de ces rectangles seront nuls. En effet, le coefficient de $d\rho_1 d\rho_2$, par exemple, sera

$$\frac{1}{2}\left[\frac{x_1^2}{(\rho_1 - a_1)(\rho_2 - a_1)} + \frac{x_2^2}{(\rho_1 - a_2)(\rho_2 - a_2)} + \ldots + \frac{x_i^2}{(\rho_1 - a_i)(\rho_2 - a_i)}\right];$$

or, si l'on pose successivement $\rho = \rho_1$ et $\rho = \rho_2$ dans l'équation (7), dont ρ_1 et ρ_2 sont racines, il vient

$$\frac{x_1^2}{\rho_1 - a_1} + \frac{x_2^2}{\rho_1 - a_2} + \ldots + \frac{x_i^2}{\rho_1 - a_i} = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{\rho_2 - a_1} + \frac{x_2^2}{\rho_2 - a_2} + \ldots + \frac{x_i^2}{\rho_2 - a_i} + 1;$$

d'où, par soustraction, on tire sans difficulté

$$\frac{x_1^2}{(\rho_1 - a_1)(\rho_2 - a_1)} + \frac{x_2^2}{(\rho_1 - a_2)(\rho_2 - a_2)} + \ldots + \frac{x_i^2}{(\rho_1 - a_i)(\rho_2 - a_i)} = 0.$$

Les coefficients des rectangles $d\rho_1 d\rho_2$, etc., sont donc nuls, et la valeur de

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx^2$$

peut s'écrire

$$p_1 d\rho_1^2 + p_2 d\rho_2^2 + \ldots + p_i d\rho_i^2,$$

en faisant, pour abréger,

$$4p_1 = \frac{x_1^2}{(\rho_1 - a_1)^2} + \frac{x_2^2}{(\rho_1 - a_2)^2} + \ldots + \frac{x_i^2}{(\rho_1 - a_i)^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$4p_i = \frac{x_1^2}{(\rho_i - a_1)^2} + \frac{x_2^2}{(\rho_i - a_2)^2} + \ldots + \frac{x_i^2}{(\rho_i - a_i)^2}.$$

8. Il reste à mettre pour $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_i^2$ leurs valeurs dans $p_1, p_2, \ldots, p_i$. Mais la substitution directe donnerait un résultat assez compliqué, qu'on peut ensuite, il est vrai, ramener par différents

moyens à une forme plus simple. L'artifice suivant que j'emprunte à un Mémoire de M. Hœdenkampf, inséré dans le Journal de M. Crelle, conduit au but plus rapidement.

Considérons l'expression générale

$$1 - \frac{x_1^2}{\rho - a_1} - \frac{x_2^2}{\rho - a_2} - \ldots - \frac{x_i}{\rho - a_i},$$

et supposons d'abord que ρ y reste indéterminée. Si l'on prenait pour ρ une des racines $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ de l'équation (7), cette expression s'évanouirait; mais elle ne sera plus nulle, et représentera une certaine fonction rationnelle de ρ, si on laisse ρ quelconque. En réduisant au même dénominateur les fractions qui la composent, on pourra la mettre sous la forme

$$\frac{F(\rho)}{(\rho - a_1)(\rho - a_2)\ldots(\rho - a_i)},$$

$F(\rho)$ étant un polynôme de degré i. Or ce polynôme $F(\rho)$ doit s'évanouir pour $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_2, \ldots, \rho = \rho_i$; donc il est de la forme

$$A(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)\ldots(\rho - \rho_i),$$

et l'hypothèse de $\rho = \infty$ montre, en outre, que $A = 1$. J'en conclus que l'expression citée

$$1 - \frac{x_1^2}{\rho - a_1} - \frac{x_2^2}{\rho - a_2} - \ldots - \frac{x_i^2}{\rho - a_i}$$

revient à

$$\frac{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)\ldots(\rho - \rho_i)}{(\rho - a_1)(\rho - a_2)\ldots(\rho - a_i)}.$$

Maintenant différentions, par rapport à ρ, ces deux quantités que nous venons de trouver égales, et posons $\rho = \rho_1$ après la différentiation. Nous aurons, d'un côté, la dérivée

$$\frac{x_1^2}{(\rho_1 - a_1)^2} + \frac{x_2^2}{(\rho_1 - a_2)^2} + \ldots + \frac{x_i^2}{(\rho_1 - a_i)^2},$$

qui est ainsi égale à $4\rho_1$, et, d'un autre côté, la dérivée égale

$$\frac{(\rho_1 - \rho_2)\ldots(\rho_1 - \rho_i)}{(\rho_1 - a_1)(\rho_1 - a_2)\ldots(\rho_1 - a_i)}.$$

à laquelle la fraction

$$\frac{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)\ldots(\rho-\rho_i)}{(\rho-a_1)(\rho-a_2)\ldots(\rho-a_i)}$$

conduit très-facilement, parce qu'il suffit de différentier le facteur $\rho-\rho_1$, les autres termes contenus dans la valeur complète de la différentielle s'évanouissant pour $\rho=\rho_1$. On a donc

$$p_1=\frac{(\rho_1-\rho_2)\ldots(\rho_1-\rho_i)}{(\rho_1-a_1)(\rho_1-a_2)\ldots(\rho_1-a_i)};$$

ou, si l'on veut,

$$p_1=\frac{\varphi'(\rho_1)}{\psi(\rho_1)},$$

en posant, comme au n° 5,

$$\varphi(\rho)=(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)\ldots(\rho-\rho_i),\quad \varphi'(\rho)=\frac{d\varphi(\rho)}{d\rho}.$$

et, de plus,

$$\psi(\rho)=(\rho-a_1)(\rho-a_2)\ldots(\rho-a_i).$$

De même

$$p_2=\frac{\varphi'(\rho_2)}{\psi(\rho_2)},\ldots,\quad p_i=\frac{\varphi'(\rho_i)}{\psi(\rho_i)}.$$

9. Maintenant, ayant

$$dx_1^2+dx_2^2+\ldots+dx_i^2=p_1d\rho_1^2+p_2d\rho_2^2+\ldots+p_id\rho_i^2,$$

ou, pour abréger,

$$\sum dx_\mu^2=\sum p_\mu d\rho_\mu^2,$$

je dis qu'on en conclut

$$\sum\left(\frac{d\Theta}{dx_\mu}\right)^2=\sum\frac{1}{p_\mu}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_\mu}\right)^2,$$

de telle sorte que l'équation aux différences partielles (4), qui, à l'aide du signe $\sum$, peut s'écrire

$$\sum\left(\frac{d\Theta}{dx_\mu}\right)^2=2(U+h),$$

sera transformée en

$$\sum \frac{1}{p_\mu}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_\mu}\right)^2 = 2(U+h),$$

c'est-à-dire en

$$(8) \qquad \frac{1}{p_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{1}{p_2}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_i}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2 = 2(U+h).$$

Plus généralement, si l'on avait

$$q_1 dx_1^2 + q_2 dx_2^2 + \ldots + q_i dx_i^2 = p_1 d\rho_1^2 + p_2 d\rho_2^2 + \ldots + p_i d\rho_i^2,$$

ou

$$\sum q_\mu dx_\mu^2 = \sum p_\mu d\rho_\mu^2,$$

les coefficients $q_1, q_2, \ldots, q_i$ étant des fonctions quelconques de $x_1, x_2, \ldots, x_i$, il en résulterait

$$\sum \frac{1}{q_\mu}\left(\frac{d\Theta}{dx_\mu}\right)^2 = \sum \frac{1}{p_\mu}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_\mu}\right)^2.$$

La démonstration de cette proposition (au moyen de laquelle on opère un changement de variables en substituant à $x_1, x_2, \ldots, x_i$ de nouvelles variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ à l'aide desquelles s'expriment $x_1, x_2, \ldots, x_i$, et, par suite, toute fonction Θ de $x_1, x_2, \ldots, x_i$) se déduit des règles ordinaires du calcul différentiel. Il est bon cependant d'entrer dans tous les détails du calcul.

En remplaçant $dx_1, dx_2, \ldots, dx_i$ par leurs valeurs, savoir :

$$dx_1 = \frac{dx_1}{d\rho_1} d\rho_1 + \frac{dx_1}{d\rho} d\rho_2 + \ldots + \frac{dx_1}{d\rho_i} d\rho_i,$$

$$dx_2 = \frac{dx_2}{d\rho_1} d\rho_1 + \frac{dx_2}{d\rho_2} d\rho_2 + \ldots + \frac{dx}{d\rho_i} d\rho_i.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$dx_i = \frac{dx_i}{d\rho_1} d\rho_1 + \frac{dx_i}{d\rho_2} d\rho_2 + \ldots + \frac{dx_i}{d\rho_i} d\rho_i.$$

dans l'équation

$$q_1 dx_1^2 + q_2 dx_2^2 + \ldots + q_i dx^2 = p_1 d\rho_1^2 + p_2 d\rho_2^2 + \ldots + p_i d\rho_i^2,$$

et comparant les deux membres, on en conclura deux groupes d'équa-

tions comprises, les unes dans ce type

$$(9)\qquad q_1\left(\frac{dx_1}{d\rho_\mu}\right)^2+q_2\left(\frac{dx_2}{d\rho_\mu}\right)^2+\ldots+q_i\left(\frac{dx_i}{d\rho_\mu}\right)^2=p_\mu,$$

et les autres dans celui ci

$$(10)\qquad q_1\frac{dx_1}{d\rho_\mu}\frac{dx_1}{d\rho_\nu}+q_2\frac{dx_2}{d\rho_\mu}\frac{dx_2}{d\rho_\nu}+\ldots+q_i\frac{dx_i}{d\rho_\mu}\frac{dx_i}{d\rho_\nu}=0.$$

Dans ces deux équations, on peut donner à l'indice μ une quelconque des valeurs $1, 2, 3, \ldots, i$, après quoi on prendra, dans la seconde, pour ν une des valeurs restantes, de manière à n'avoir jamais $\nu=\mu$. Pour chaque valeur de μ, il y aura i équations, une du type (9), les autres du type (10).

On peut observer qu'à cause de la symétrie des formules on aurait de même

$$(11)\qquad p_1\left(\frac{d\rho_1}{dx_\mu}\right)^2+p_2\left(\frac{d\rho_2}{dx_\mu}\right)^2+\ldots+p_i\left(\frac{d\rho_i}{dx_\mu}\right)^2=q_\mu,$$

et

$$(12)\qquad p_1\frac{d\rho_1}{dx_\mu}\frac{d\rho_1}{dx_\nu}+p_2\frac{d\rho_2}{dx_\mu}\frac{d\rho_2}{dx_\nu}+\ldots+p_i\frac{d\rho_i}{dx_\mu}\frac{d\rho_i}{dx_\nu}=0,$$

pour ν différent de μ.

Maintenant je différentie, par rapport à ρ_ν, l'équation identique

$$\rho_\mu=\rho_\mu,$$

mais en regardant, dans le premier membre, ρ_μ comme une fonction des variables $x_1, x_2, \ldots, x_i$, qui, à leur tour, dépendent de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$. On trouve ainsi

$$(13)\qquad \frac{d\rho_\mu}{dx_1}\frac{dx_1}{d\rho_\mu}+\frac{d\rho_\mu}{dx_2}\frac{dx_2}{d\rho_\mu}+\ldots+\frac{d\rho_\mu}{dx_i}\frac{dx_i}{d\rho_\mu}=1.$$

La même équation identique $\rho_\mu=\rho_\mu$, différentiée par rapport à ρ_ν, l'indice ν étant différent de μ, fournira aussi

$$(14)\qquad \frac{d\rho_\mu}{dx_1}\frac{dx_1}{d\rho_\nu}+\frac{d\rho_\mu}{dx_2}\frac{dx_2}{d\rho_\nu}+\ldots+\frac{d\rho_\mu}{dx_i}\frac{dx_i}{d\rho_\nu}=0$$

Les équations (13) et (14), en laissant fixe l'indice μ, et donnant à l'autre indice ν toutes les valeurs dont il est susceptible, seront en nombre i; elles détermineront, comme il était aisé de le prévoir à priori, les i dérivées

$$\frac{d\rho_\mu}{dx_1},\quad \frac{d\rho_\mu}{dx_2},\ldots,\quad \frac{d\rho_\mu}{dx_i};$$

quand on suppose connues celles de $x_1, x_2, \ldots, x_i$, par rapport à $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$. En les résolvant, on obtiendrait les valeurs des dérivées dont il s'agit; mais, à l'aide des formules (9) et (10), je puis vérifier de suite qu'on a généralement

$$(15)\qquad \frac{d\rho_\mu}{dx_i} = \frac{q_i}{p_\mu}\frac{dx_i}{d\rho_\mu},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\rho_\mu}{dx_1} = \frac{q_1}{p_\mu}\frac{dx_1}{d\rho_\mu},\quad \frac{d\rho_\mu}{dx_2} = \frac{q_2}{p_\mu}\frac{dx_2}{d\rho_\mu},\ldots,\quad \frac{d\rho_\mu}{dx_i} = \frac{q_i}{p_\mu}\frac{dx_i}{d\rho_\mu};$$

en effet, si l'on substitue ces valeurs dans les équations (13) et (14), et qu'on multiplie ensuite par p_μ, on aura des résultats identiques avec les formules (9), par conséquent des résultats exacts.

On tire de là, réciproquement,

$$\frac{dx_1}{d\rho} = \frac{p_\mu}{q_1}\frac{d\rho_\mu}{dx_1},\quad \frac{dx_2}{d\rho_\mu} = \frac{p_\mu}{q_2}\frac{d\rho_\mu}{dx_2},\ldots,\quad \frac{dx_i}{d\rho} = \frac{p_\mu}{q_i}\frac{d\rho_\mu}{dx_i},$$

moyennant quoi les formules (9) et (10) fournissent

$$(16)\qquad \frac{1}{q_1}\left(\frac{d\rho_\mu}{dx_1}\right)^2 + \frac{1}{q_2}\left(\frac{d\rho_\mu}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{q_i}\left(\frac{d\rho_\mu}{dx_i}\right) = \frac{1}{p_\mu},$$

et

$$(17)\qquad \frac{1}{q_1}\frac{d\rho_\mu}{dx_1}\frac{d\rho_\nu}{dx_1} + \frac{1}{q_2}\frac{d\rho_\mu}{dx_2}\frac{d\rho_\nu}{dx_2} + \ldots + \frac{1}{q_i}\frac{d\rho_\mu}{dx_i}\frac{d\rho_\nu}{dx_i} = 0;$$

et il est clair qu'on doit avoir de même

$$(18)\qquad \frac{1}{p_1}\left(\frac{dx_\mu}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{1}{p_2}\left(\frac{dx_\mu}{d\rho_2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_i}\left(\frac{dx_\mu}{d\rho_i}\right)^2 = \frac{1}{q_\mu},$$

et

$$(19)\qquad \frac{1}{p_1}\frac{dx_\mu}{d\rho_1}\frac{dx_\nu}{d\rho_1} + \frac{1}{p_2}\frac{dx_\mu}{d\rho_2}\frac{dx_\nu}{d\rho_2} + \ldots + \frac{1}{p_i}\frac{dx_\mu}{d\rho_i}\frac{dx_\nu}{d\rho_i} = 0.$$

Nous pouvons à présent nous occuper des dérivées d'une fonction quelconque Θ et démontrer l'égalité des deux quantités

$$\frac{1}{q_1}\left(\frac{d\Theta}{dx_1}\right)^2+\frac{1}{q_2}\left(\frac{d\Theta}{dx_2}\right)^2+\ldots+\frac{1}{q_i}\left(\frac{d\Theta}{dx_i}\right)^2,$$

et

$$\frac{1}{p_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)+\frac{1}{p_2}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p_i}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2.$$

On a, pour un indice quelconque s,

$$\frac{d\Theta}{dx_s}=\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx_s}+\frac{d\Theta}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx_s}+\ldots+\frac{d\Theta}{d\rho_i}\frac{d\rho_i}{dx_s}.$$

Formons donc la valeur de

$$\frac{1}{q_s}\left(\frac{d\Theta}{dx_s}\right)^2,$$

puis donnons à s les valeurs successives $1, 2, 3, \ldots, i$, et ajoutons les résultats. Il y aura des termes de deux espèces : les uns contenant le carré d'une dérivée, comme $\left(\frac{d\Theta}{d\rho_\mu}\right)^2$; les autres un rectangle, comme $\frac{d\Theta}{d\rho_\mu}\frac{d\Theta}{d\rho_\nu}$. Le coefficient de $\left(\frac{d\Theta}{d\rho_\mu}\right)^2$ sera

$$\frac{1}{q_1}\left(\frac{d\rho_\mu}{dx_1}\right)^2+\frac{1}{q_2}\left(\frac{d\rho_\mu}{dx_2}\right)^2+\ldots+\frac{1}{q_i}\left(\frac{d\rho_\mu}{dx_i}\right)^2,$$

quantité égale à $\frac{1}{p_\mu}$, d'après la formule (16). Quant au coefficient de $\frac{d\Theta}{d\rho_\mu}\frac{d\Theta}{d\rho_\nu}$, il se réduira à zéro par la formule (17). Le résultat définitif sera donc, d'une part,

$$\frac{1}{q_1}\left(\frac{d\Theta}{dx_1}\right)^2+\frac{1}{q_2}\left(\frac{d\Theta}{dx_2}\right)^2+\ldots+\frac{1}{q_i}\left(\frac{d\Theta}{dx_i}\right)^2,$$

et, d'autre part,

$$\frac{1}{p_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2+\frac{1}{p_2}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p_i}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2;$$

ces deux quantités sont donc égales, ce qu'il fallait démontrer.

10. Lorsqu'on a $q_1=q_2=\ldots=q_i=1$, ce qui arrive, comme on

l'a vu, dans la question que nous voulons traiter, l'analyse précédente transforme l'une dans l'autre les deux quantités

$$\left(\frac{d\Theta}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\Theta}{dx_i}\right)^2,$$

et

$$\frac{1}{p_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{1}{p_2}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_i}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2.$$

Elle permet donc, comme on l'a déjà dit, de remplacer l'ancienne équation

$$(4) \qquad \left(\frac{d\Theta}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\Theta}{dx_i}\right)^2 = 2(U + h)$$

par l'équation nouvelle

$$(8) \qquad \frac{1}{p_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{1}{p_2}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_i}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2 = 2(U + h).$$

En mettant pour $p_1, p_2, \ldots, p_i$ leurs valeurs données au n° 8, savoir :

$$p_1 = \frac{\varphi'(\rho_1)}{\psi(\rho_1)}, \quad p_2 = \frac{\varphi'(\rho_2)}{\psi(\rho_2)}, \ldots \quad p_i = \frac{\varphi'(\rho_i)}{\psi(\rho_i)},$$

l'équation (8) devient

$$\frac{\psi(\rho_1)}{\varphi'(\rho_1)}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{\psi(\rho_2)}{\varphi'(\rho_2)}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 + \ldots + \frac{\psi(\rho_i)}{\varphi'(\rho_i)}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2 = 2(U + h).$$

On lui donnera une forme plus commode encore pour notre objet en remplaçant les variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ par d'autres variables $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_i$ liées respectivement à celles-là par les formules

$$\frac{d\rho_1}{\sqrt{\psi(\rho_1)}} = d\zeta_1, \quad \frac{d\rho_2}{\sqrt{\psi(\rho_2)}} = d\zeta_2, \ldots, \quad \frac{d\rho_i}{\sqrt{\psi(\rho_i)}} = d\zeta_i,$$

en vertu desquelles on peut regarder ζ_1 comme une fonction de ρ_1, ou ρ_1 comme une fonction de ζ_1, à volonté, et de même ρ_2 et ζ_2 comme des fonctions l'une de l'autre, etc. L'équation en Θ sera alors

$$(20) \qquad \frac{1}{\varphi'(\rho_1)}\left(\frac{d\Theta}{d\zeta_1}\right)^2 + \frac{1}{\varphi'(\rho_2)}\left(\frac{d\Theta}{d\zeta_2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{\varphi'(\rho_i)}\left(\frac{d\Theta}{d\zeta_i}\right)^2 = 2(U + h),$$

et la démonstration du théorème énoncé au n° 5 en découlera immédiatement.

En effet, on a vu dans ce numéro que

$$\varphi(\rho) = (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)\ldots(\rho - \rho_i).$$

En effectuant le produit, $\varphi(\rho)$ est donc un polynôme de degré i, et le coefficient de ρ^i, dans ce polynôme, est égal à l'unité. On a donc par les propriétés connues des fractions rationnelles :

$$\frac{1}{\varphi'(\rho_1)} + \frac{1}{\varphi'(\rho_2)} + \ldots + \frac{1}{\varphi'(\rho_i)} = 0,$$

$$\frac{\rho_1}{\varphi'(\rho_1)} + \frac{\rho_2}{\varphi'(\rho_2)} + \ldots + \frac{\rho_i}{\varphi'(\rho_i)} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\rho_1^{i-2}}{\varphi'(\rho_1)} + \frac{\rho_2^{i-2}}{\varphi'(\rho_2)} + \ldots + \frac{\rho_i^{i-2}}{\varphi'(\rho_i)} = 0,$$

$$\frac{\rho_1^{i-1}}{\varphi'(\rho_1)} + \frac{\rho_2^{i-1}}{\varphi'(\rho_2)} + \ldots + \frac{\rho_i^{i-1}}{\varphi'(\rho_i)} = 1.$$

Il s'ensuit que, dans l'hypothèse de

$$U = \frac{f_1(\rho_1)}{\varphi'(\rho_1)} + \frac{f_2(\rho_2)}{\varphi'(\rho_2)} + \ldots + \frac{f_i(\rho_i)}{\varphi'(\rho_i)},$$

qui est celle de notre théorème, on satisfera à l'équation (20) en prenant

$$\left(\frac{d\Theta}{d\zeta_1}\right)^2 = \alpha_1 + \alpha_2\rho_1 + \alpha_3\rho_1^2 + \ldots + \alpha_{i-1}\rho_1^{i-2} + 2h\rho_1^{i-1} + 2f_1(\rho_1),$$

$$\left(\frac{d\Theta}{d\zeta_2}\right)^2 = \alpha_1 + \alpha_2\rho_2 + \alpha_3\rho_2^2 + \ldots + \alpha_{i-1}\rho_2^{i-2} + 2h\rho_2^{i-1} + 2f_2(\rho_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{d\Theta}{d\zeta_i}\right)^2 = \alpha_1 + \alpha_2\rho_i + \alpha_3\rho_i^2 + \ldots + \alpha_{i-1}\rho_i^{i-2} + 2h\rho_i^{i-1} + 2f_i(\rho_i),$$

quelles que soient les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$. De là résulte pour Θ une valeur convenable et propre à fournir, d'après la règle de M. Jacobi, les intégrales du système des équations différentielles (3). Notre théorème est donc démontré.

En faisant, pour abréger,

$$\alpha_1 + \alpha_2\rho + \alpha_3\rho^2 + \ldots + \alpha_{i-1}\rho^{i-2} + 2h\rho^{i-1} = \varpi(\rho),$$

puis

$$\varpi(\rho_1) + 2f_1(\rho_1) = F_1(\rho_1),$$
$$\varpi(\rho_2) + 2f_2(\rho_2) = F_2(\rho_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varpi(\rho_i) + 2f_i(\rho_i) = F_i(\rho_i),$$

et rétablissant $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ au lieu de $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_i$, on voit que la valeur de Θ, fournie par notre analyse, peut s'écrire

$$\Theta = \int d\rho_1 \sqrt{\frac{F_1(\rho_1)}{\psi(\rho_1)}} + \int d\rho_2 \sqrt{\frac{F_2(\rho_2)}{\psi(\rho_2)}} + \ldots + \int d\rho_i \sqrt{\frac{F_i(\rho_i)}{\psi(\rho_i)}}.$$

Les intégrales des équations (3), qui en résultent par les formules (5), sont

$$\int \frac{d\rho_1}{\sqrt{F_1(\rho_1)\psi(\rho_1)}} + \int \frac{d\rho_2}{\sqrt{F_2(\rho_2)\psi(\rho_2)}} + \ldots + \int \frac{d\rho_i}{\sqrt{F_i(\rho_i)\psi(\rho_i)}} = 2\beta_1,$$
$$\int \frac{\rho_1 d\rho_1}{\sqrt{F_1(\rho_1)\psi(\rho_1)}} + \int \frac{\rho_2 d\rho_2}{\sqrt{F_2(\rho_2)\psi(\rho_2)}} + \ldots + \int \frac{\rho_i d\rho_i}{\sqrt{F_i(\rho_i)\psi(\rho_i)}} = 2\beta_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\int \frac{\rho_1^{i-2} d\rho_1}{\sqrt{F_1(\rho_1)\psi(\rho_1)}} + \int \frac{\rho_2^{i-2} d\rho_2}{\sqrt{F_2(\rho_2)\psi(\rho_2)}} + \ldots + \int \frac{\rho_i^{i-2} d\rho_i}{\sqrt{F_i(\rho_i)\psi(\rho_i)}} = 2\beta_{i-1},$$
$$\int \frac{\rho_1^{i-1} d\rho_1}{\sqrt{F_1(\rho_1)\psi(\rho_1)}} + \int \frac{\rho_2^{i-1} d\rho_2}{\sqrt{F_2(\rho_2)\psi(\rho_2)}} + \ldots + \int \frac{\rho_i^{i-1} d\rho_i}{\sqrt{F_i(\rho_i)\psi(\rho_i)}} = t + \varepsilon.$$

11. On sera peut-être curieux de connaître aussi la forme que prennent en $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ les équations intermédiaires (6) du n° 5, savoir :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\Theta}{dx_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{d\Theta}{dx_2}, \ldots, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{d\Theta}{dx_i}.$$

On y parviendra aisément, et l'on obtiendra un résultat simple si l'on se rappelle les formules (16) et (17) du n° 9, qui, dans notre hypothèse actuelle de $q_1 = q_2 = \ldots q_i = 1$, se réduisent respectivement à

$$(21) \qquad \left(\frac{d\rho_\mu}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_\mu}{dx}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_\mu}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\rho}.$$

et

$$(22)\qquad \frac{d\rho_\mu}{dx_1}\frac{d\rho_\nu}{dx_1}+\frac{d\rho_\mu}{dx_2}\frac{d\rho_\nu}{dx_2}+\ldots+\frac{d\rho_\mu}{dx_i}\frac{d\rho_\nu}{dx_i}=0,$$

ν étant différent de μ. Nous n'aurons pas besoin des formules conjuguées à celles-là :

$$\frac{1}{p}\left(\frac{dx_\mu}{d\rho_1}\right)^2+\frac{1}{p_2}\left(\frac{dx_\mu}{d\rho_2}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p_i}\left(\frac{dx_\mu}{d\rho_i}\right)^2=1,$$

$$\frac{1}{p_1}\frac{dx_\mu}{d\rho_1}\frac{dx_\nu}{d\rho_1}+\frac{1}{p_2}\frac{dx_\mu}{d\rho_2}\frac{dx_\nu}{d\rho_2}+\ldots+\frac{1}{p_i}\frac{dx_\mu}{d\rho_i}\frac{dx_\nu}{d\rho_i}=0,$$

qui se déduisent de même des équations (18) et (19).

On a

$$\frac{d\rho_1}{dt}=\frac{d\rho_1}{dx_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{d\rho_1}{dx_2}\frac{dx_2}{dt}+\ldots+\frac{d\rho_1}{dx_i}\frac{dx_i}{dt}.$$

Donc

$$\frac{d\rho_1}{dt}=\frac{d\rho_1}{dx_1}\frac{d\Theta}{dx_1}+\frac{d\rho_1}{dx_2}\frac{d\Theta}{dx_2}+\ldots+\frac{d\rho_1}{dx_i}\frac{d\Theta}{dx_i};$$

mais

$$\frac{d\Theta}{dx_1}=\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx_1}+\frac{d\Theta}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx_1}+\ldots+\frac{d\Theta}{d\rho_i}\frac{d\rho_i}{dx_1}.$$

$$\frac{d\Theta}{dx_2}=\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx_2}+\frac{d\Theta}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx_2}+\ldots+\frac{d\Theta}{d\rho_i}\frac{d\rho_i}{dx_2}.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d\Theta}{dx_i}=\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx_i}+\frac{d\Theta}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx_i}+\ldots+\frac{d\Theta}{d\rho_i}\frac{d\rho_i}{dx_i}.$$

En substituant ces valeurs dans celle de $\frac{d\rho_1}{dt}$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_1}{dt}=&\frac{d\Theta}{d\rho_1}\left[\left(\frac{d\rho_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{d\rho_1}{dx_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{d\rho_1}{dx_i}\right)^2\right]\\&+\frac{d\Theta}{d\rho_2}\left(\frac{d\rho_1}{dx_1}\frac{d\rho_2}{dx_1}+\frac{d\rho_1}{dx_2}\frac{d\rho_2}{dx_2}+\ldots+\frac{d\rho_1}{dx_i}\frac{d\rho_2}{dx_i}\right)\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\frac{d\Theta}{d\rho_i}\left(\frac{d\rho_1}{dx_1}\frac{d\rho_i}{dr}+\frac{d\rho_1}{dx_2}\frac{d\rho_i}{dx_2}+\ldots+\frac{d\rho_1}{dx_i}\frac{d\rho_i}{dx_i}\right).\end{aligned}$$

Le coefficient de $\frac{d\Theta}{d\rho_1}$ est égal à $\frac{1}{p_1}$ en vertu de la formule (21), et les autres sont nuls par la formule (22); par suite,

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{1}{p_1}\frac{d\Theta}{d\rho_1}.$$

Les valeurs de $\frac{d\rho_2}{dt}, \ldots, \frac{d\rho_i}{dt}$ se déduisant de celle de $\frac{d\rho_1}{dt}$ par de simples changements d'indices, nous pouvons en conclure que le système des équations intermédiaires (6) se transforme ainsi :

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{d\rho_1}{dt} = \frac{1}{p_1}\frac{d\Theta}{d\rho_1}, \\ \frac{d\rho_2}{dt} = \frac{1}{p_2}\frac{d\Theta}{d\rho_2}, \\ \vdots \\ \frac{d\rho_i}{dt} = \frac{1}{p_i}\frac{d\Theta}{d\rho_i}. \end{array}\right.$$

Cette transformation est générale. Quand on prend en particulier, comme ci-dessus,

$$\Theta = \int d\rho_1 \sqrt{\frac{F_1(\rho_1)}{\psi(\rho_1)}} + \int d\rho_2 \sqrt{\frac{F_2(\rho_2)}{\psi(\rho_2)}} + \ldots + \int d\rho_i \sqrt{\frac{F_i(\rho_i)}{\psi(\rho_i)}},$$

elle donne

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{1}{p_1}\sqrt{\frac{F_1(\rho_1)}{\psi(\rho_1)}},$$
$$\frac{d\rho_2}{dt} = \frac{1}{p_2}\sqrt{\frac{F_2(\rho_2)}{\psi(\rho_2)}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{d\rho_i}{dt} = \frac{1}{p_i}\sqrt{\frac{F_i(\rho_i)}{\psi(\rho_i)}},$$

ou bien, à cause des valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_i$ données au n° 8,

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{\sqrt{F_1(\rho_1)\psi(\rho_1)}}{\varphi'(\rho_1)},$$
$$\frac{d\rho_2}{dt} = \frac{\sqrt{F_2(\rho_2)\psi(\rho_2)}}{\varphi'(\rho_2)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{d\rho_i}{dt} = \frac{\sqrt{F_i(\rho_i)\psi(\rho_i)}}{\varphi'(\rho_i)}.$$

On trouverait les mêmes résultats en différentiant les équations intégrales écrites à la fin du numéro précédent, puis résolvant par rapport à

$$\frac{d\rho_1}{\sqrt{F_1(\rho_1)\psi(\rho_1)}},\quad \frac{d\rho_2}{\sqrt{F_2(\rho_2)\psi(\rho_2)}},\ldots,\quad \frac{d\rho_i}{\sqrt{F_i(\rho_i)\psi(\rho_i)}},$$

considérées comme de simples inconnues, les équations

$$\frac{d\rho_1}{\sqrt{F_1(\rho_1)\psi(\rho_1)}}+\frac{d\rho_2}{\sqrt{F_2(\rho_2)\psi(\rho_2)}}+\ldots+\frac{d\rho_i}{\sqrt{F_i(\rho_i)\psi(\rho_i)}}=0,$$

$$\frac{\rho_1 d\rho_1}{\sqrt{F_1(\rho_1)\psi(\rho_1)}}+\frac{\rho_2 d\rho_2}{\sqrt{F_2(\rho_2)\psi(\rho_2)}}+\ldots+\frac{\rho_i d\rho_i}{\sqrt{F_i(\rho_i)\psi(\rho_i)}}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\rho_1^{i-1} d\rho_1}{\sqrt{F_1(\rho_1)\psi(\rho_1)}}+\frac{\rho_2^{i-1} d\rho_2}{\sqrt{F_2(\rho_2)\psi(\rho_2)}}+\ldots+\frac{\rho_i^{i-1} d\rho_i}{\sqrt{F_i(\rho_i)\psi(\rho_i)}}=0,$$

$$\frac{\rho_1^{i-1} d\rho_1}{\sqrt{F_1(\rho_1)\psi(\rho_1)}}+\frac{\rho_2^{i-1} d\rho_2}{\sqrt{F_2(\rho_2)\psi(\rho_2)}}+\ldots+\frac{\rho_i^{i-1} d\rho_i}{\sqrt{F_i(\rho_i)\psi(\rho_i)}}=dt,$$

que cette différentiation produit. La résolution des équations du premier degré dont nous parlons s'effectue avec facilité, par un procédé connu, dû à Lagrange, et l'on retombe sur les formules ci-dessus, en se rappelant que

$$\varphi(\rho)=(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)\ldots(\rho-\rho_i).$$

12. La considération du cas particulier où l'on prend

$$f_1(\rho_1)=0,\quad f_2(\rho_2)=0,\ldots,\quad f_i(\rho_i)=0,$$

c'est-à-dire

$$U=0,$$

conduit aux intégrales sous forme algébrique des équations différentielles que M. Jacobi nomme *abéliennes*. Dans ce cas, les équations (3) se réduisant à

$$\frac{dx_1}{dt}=0,\quad \frac{dx_2}{dt}=0,\ldots,\quad \frac{dx_i}{dt}=0,$$

s'intègrent immédiatement, et donnent

$$x_1=b_1t+c_1,\quad x_2=b_2t+c_2,\ldots,\quad x_i=b_it+c_i.$$

$b_1, b_2, \ldots, b_i, c_1, c_2, \ldots, c_i$ étant les constantes arbitraires. On en déduira i équations finies entre $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ et t, en remplaçant $x_1, x_2, \ldots, x_i$ par leurs valeurs en $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ tirées des formules du n° 6. Or ces équations, intégrales du système (3), ne peuvent manquer de revenir au fond aux intégrales qu'on tire des formules du n° 10, en y faisant, d'après l'hypothèse actuelle,

$$f_1(\rho_1) = 0, \quad f_2(\rho_2) = 0, \ldots, \quad f_i(\rho_i) = 0,$$

et, par conséquent,

$$F_1(\rho) = F_2(\rho) = \ldots = F_i(\rho) = \varpi(\rho).$$

La forme, il est vrai, sera très-différente; mais la relation établie entre $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ et t devra rester la même. En posant, pour abréger,

$$\Delta(\rho) = \sqrt{\varpi(\rho)\psi(\rho)},$$

les formules citées donnent

$$\int \frac{d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \int \frac{d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \int \frac{d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 2\beta_1,$$

$$\int \frac{\rho_1 d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \int \frac{\rho_2 d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \int \frac{\rho_i d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 2\beta_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int \frac{\rho_1^{i-1} d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \int \frac{\rho_2^{i-1} d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \int \frac{\rho_i^{i-1} d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 2\beta_{i-1},$$

$$\int \frac{\rho_1^{i-1} d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \int \frac{\rho_2^{i-1} d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \int \frac{\rho_i^{i-1} d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = t + \varepsilon.$$

Ces intégrales compliquées doivent revenir, nous le répétons, aux intégrales de forme plus simple

$$x_1 = b_1 t + c_1, \quad x_2 = b_2 t + c_2, \ldots, \quad x_i = b_i t + c_i,$$

en exprimant, bien entendu, les constantes arbitraires $b_1, b_2, \ldots, b_i, c_1, c_2, \ldots, c_i$ au moyen de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}, \varepsilon, h$. Et si l'on met de côté l'équation

$$\int \frac{\rho_1^{i-1} d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \int \frac{\rho_2^{i-1} d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \int \frac{\rho_i^{i-1} d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = t + \varepsilon,$$

la seule de son espèce où t figure, les $i-1$ équations qui précèdent celles-là, et qui, par la différentiation, produisent ces équations abéliennes

$$\frac{d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \frac{d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \frac{d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 0,$$

$$\frac{\rho_1 d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \frac{\rho_2 d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \frac{\rho_i d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\rho_1^{i-2} d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \frac{\rho_2^{i-2} d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \frac{\rho_i^{i-2} d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 0,$$

devront revenir de même aux $i-1$ équations en $x_1, x_2, \ldots, x_i$ que l'on obtient par l'élimination de t. Ces équations entre $x_1, x_2, \ldots, x_i$ sont donc les intégrales du système des équations abéliennes que je viens d'écrire; elles renferment $i-1$ constantes arbitraires $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}$ qui n'entrent plus dans les équations différentielles : je ne parle pas de la constante ε qui, étant jointe à t a dû disparaître avec cette variable. Quant à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, h$, on les regardera ici comme des quantités données. Et l'on doit remarquer que le polynôme $\varpi(\rho)\psi(\rho)$, contenu sous un radical carré dans $\Delta(\rho)$, est un polynôme de degré $2i-1$ absolument quelconque; en effet, on a

$$\psi(\rho) = 4(\rho - a_1)(\rho - a_2)\ldots(\rho - a_i),$$

$$\varpi(\rho) = \alpha_1 + \alpha_2\rho + \ldots + \alpha_{i-1}\rho^{i-2} + 2h\rho^{i-1};$$

et rien n'empêche de donner à $a_1, a_2, \ldots, a_i, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, h$ des valeurs quelconques, même imaginaires.

Les équations entre $x_1, x_2, \ldots, x_i$, qui servent d'intégrales à nos équations abéliennes, sont linéaires par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_i$. Les formules du n° 6 donnent d'ailleurs pour les carrés $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_i^2$ des expressions rationnelles en $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ entières et symétriques relativement à ces nouvelles variables, et même exprimables linéairement par leur somme $\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_i$, la somme de leurs produits deux à deux, celle de leurs produits trois à trois, etc. Cela étant, élevons au carré les valeurs de $x_2, x_3, \ldots, x_i$ en x_1, lesquelles sont de la forme $Ax_1 - B$, puis éliminons entre les équations résultantes la première puissance de x_1, en laissant subsister les termes qui contiennent x_1^2

Nous trouverons ainsi $i-2$ équations du premier degré en $x_1^2, x_2^2, \ldots x_i^2$, lesquelles, lors de l'introduction des variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$, resteront du premier degré par rapport à la somme de ces nouvelles variables, et aux sommes de leurs produits deux à deux, trois à trois, etc. Pour compléter le nombre $i-1$, on ajoutera à ces $i-2$ équations une des équations primitives, $x_2 = Ax_1 + B$ par exemple, ou plutôt on en tirera l'équation

$$(x_2^2 - A^2 x_1^2 - B^2)^2 = 4A^2B^2x_1^2,$$

qui est du second degré par rapport à x_1^2, x_2^2, et pourra être réduite à ne contenir, relativement à $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$, qu'une fonction entière du second degré de deux des sommes symétriques citées plus haut.

Cette forme des intégrales des équations différentielles abéliennes a été récemment signalée par M. Jacobi, ainsi qu'on peut le voir dans le Journal de M. Crelle, ou au tome XI de notre *Journal de Mathématiques*, page 342. L'analyse précédente y mène naturellement. Mais il est juste d'ajouter que c'est encore M. Jacobi qui a indiqué, dès 1839, la transformation généralisée des coordonnées ordinaires en coordonnées elliptiques, c'est-à-dire le passage des variables x_1, $x_2, \ldots, x_i$ aux variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$, dans des équations différentielles, en nombre quelconque, du genre de celles que la dynamique fournit pour le mouvement d'un point matériel abandonné à la seule impulsion d'une vitesse initiale, comme l'ayant enfin conduit, sans le secours du théorème même d'Abel, aux intégrales sous forme algébrique des équations abéliennes [*]. Les travaux divers qui ont paru depuis sur ce sujet ne doivent pas faire oublier la source primitive et féconde de la découverte.

Il nous reste à montrer comment on lie entre elles les constantes

---

[*] *Voyez* le Journal de M. Crelle, tome XIX, ou notre *Journal de Mathématiques*, tome VI, page 267. Le Mémoire très-court, mais plein de choses, auquel nous renvoyons traite des *différents usages d'une transformation analytique remarquable*; c'est celle de $x_1, x_2, \ldots, x_i$ en $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$. Il a été lu à l'Académie de Berlin, le 18 avril 1839. Depuis cette époque, M. Jacobi lui-même et d'autres géomètres sont revenus plusieurs fois, surtout dans le Journal de M. Crelle, sur la question des équations différentielles abéliennes.

arbitraires qui entrent dans les intégrales algébriques des équations abéliennes et celles qui sont contenues dans leurs intégrales transcendantes. Pour plus de symétrie, nous conserverons la variable t, ou, si l'on veut, nous l'introduirons dans le système abélien, en rétablissant l'équation

$$\int \frac{\rho_1^{i-1}\,d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \ldots + \int \frac{\rho_i^{i-1}\,d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = t + \varepsilon,$$

que nous avions d'abord mise de côté. Nos équations différentielles seront ainsi :

$$\frac{d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \frac{d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \frac{d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 0,$$

$$\frac{\rho_1\,d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \frac{\rho_2\,d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \frac{\rho_i\,d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\rho_1^{i-2}\,d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \frac{\rho_2^{i-2}\,d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \frac{\rho_i^{i-2}\,d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 0,$$

$$\frac{\rho_1^{i-1}\,d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \frac{\rho_2^{i-1}\,d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \frac{\rho_i^{i-1}\,d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = dt,$$

et l'on en déduira, par un procédé de Lagrange, déjà rappelé à la fin du n° **11**,

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{\Delta(\rho_1)}{\varphi'(\rho_1)},\quad \frac{d\rho_2}{dt} = \frac{\Delta(\rho_2)}{\varphi'(\rho_2)},\ldots,\quad \frac{d\rho_i}{dt} = \frac{\Delta(\rho_i)}{\varphi'(\rho_i)}.$$

Désignons par $k_1, k_2, \ldots, k_i$ les valeurs arbitraires de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ pour $t = 0$. Les valeurs de

$$\frac{d\rho_1}{dt},\quad \frac{d\rho_2}{dt},\ldots,\quad \frac{d\rho_i}{dt},$$

pour $t = 0$ seront de suite déterminées par ce qui précède en fonction de $k_1, k_2, \ldots, k_i$, et l'on pourra aussi former aisément celles de

$$x_1,\quad x_2,\ldots,\quad x_i,\quad \frac{dx_1}{dt},\quad \frac{dx_2}{dt},\ldots,\quad \frac{dx_i}{dt}.$$

Cela posé, nous aurons, d'une part, les intégrales transcendantes

$$\int_{k_1}^{\rho_1} \frac{d\rho}{\Delta(\rho_1)} + \int_{k_2}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \int_{k_i}^{\rho_i} \frac{d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 0,$$

$$\int_{k_1}^{\rho_1} \frac{\rho_1 d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \int_{k_2}^{\rho_2} \frac{\rho_2 d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \int_{k_i}^{\rho_i} \frac{\rho_i d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int_{k_1}^{\rho_1} \frac{\rho_1^{i-2} d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \int_{k_2}^{\rho_2} \frac{\rho_2^{i-2} d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \int_{k_i}^{\rho_i} \frac{\rho_i^{i-2} d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = 0,$$

$$\int_{k_1}^{\rho_1} \frac{\rho_1^{i-1} d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \int_{k_2}^{\rho_2} \frac{\rho_2^{i-1} d\rho_1}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \int_{k_i}^{\rho_i} \frac{\rho_i^{i-1} d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = t,$$

où $k_1, k_2, \ldots, k_i$ sont les constantes arbitraires de l'intégration, et, d'autre part, les intégrales algébriques

$$x_1 = b_1 t + c_1, \quad x_2 = b_2 t + c_2, \ldots, \quad x_i = b_i t + c_i,$$

dont les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_i, b_1, b_2, \ldots, b_i$ s'expriment par $k_1, k_2, \ldots, k_i$, puisqu'elles représentent les valeurs de

$$x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_i, \quad \frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \quad \frac{dx_i}{dt},$$

pour $t = 0$.

Nous nous en tiendrons là, pour le moment, sur la question des équations abéliennes, sauf à y revenir peut-être une autre fois. Nous ne parlerons pas même des conséquences que peut offrir l'équation

$$\int \frac{\rho_1^{i-1} d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} + \int \frac{\rho_2^{i-1} d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} + \ldots + \int \frac{\rho_i^{i-1} d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = t + \xi,$$

dont le second membre s'exprime algébriquement, ni de celles qu'on peut obtenir en considérant l'intégrale

$$\int \left[\frac{\chi(\rho_1)}{\Delta(\rho_1)} d\rho_1 + \frac{\chi(\rho_2)}{\Delta(\rho_2)} d\rho_2 + \ldots + \frac{\chi(\rho_i)}{\Delta(\rho_i)} d\rho_i \right],$$

où $\chi(\rho)$ désigne une fonction rationnelle quelconque de ρ. A cause de

$$\frac{d\rho_1}{\Delta(\rho_1)} = \frac{dt}{\varphi'(\rho_1)}, \quad \frac{d\rho_2}{\Delta(\rho_2)} = \frac{dt}{\varphi'(\rho_2)}, \ldots, \quad \frac{d\rho_i}{\Delta(\rho_i)} = \frac{dt}{\varphi'(\rho_i)},$$

cette intégrale devient

$$\int \left[\frac{\chi(\rho_1)}{\varphi'(\rho_1)} + \frac{\chi(\rho_2)}{\varphi'(\rho_2)} + \ldots + \frac{\chi(\rho_i)}{\varphi'(\rho_i)}\right] dt;$$

le coefficient de dt, sous le signe $\int$, est une fonction rationnelle et symétrique de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$, qui deviendra une fonction rationnelle de $x_1, x_2, \ldots, x_i$, et enfin de t, puisque $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ sont les diverses racines d'une même équation à coefficients rationnels en $x_1, x_2, \ldots, x_i$, et que d'ailleurs $x_1, x_2, \ldots, x_i$ sont des fonctions linéaires de t. Notre intégrale ne dépendra donc que de quantités algébriques et logarithmiques; ce qui devait être, en effet, d'après le théorème d'Abel. Mais n'insistons pas ici là-dessus. Notre but était de donner la démonstration du théorème du n° 5, qui nous paraît nouveau et important. Ce but est rempli. Nous devions naturellement dire ensuite quelques mots des fonctions abéliennes; mais il faut mettre fin à des détails qui, en se prolongeant, nous écarteraient trop de notre sujet.

15. Le théorème du n° 5 peut, au reste, se généraliser de la manière suivante. Il s'agit, on se le rappelle, de trouver une fonction Θ vérifiant l'équation aux différences partielles

$$(4) \qquad \left(\frac{d\Theta}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\Theta}{dx_i}\right)^2 = 2(U + h),$$

et contenant, outre la constante h, $i - 1$ constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ distinctes de celle qu'on peut toujours introduire dans Θ par simple addition. Or voici un cas très-étendu où l'on obtiendra cette fonction Θ.

Concevons qu'on ait exprimé les variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_i$ de l'équation (4) par d'autres variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$, en nombre égal, qui les remplacent, et que de cette manière l'équation (4) ait été transformée en une autre équation de la forme

$$\frac{1}{p_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{1}{p_2}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_i}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2 = 2(U + h),$$

$p_1, p_2, \ldots, p_i$ étant des fonctions de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$. Cela suppose déjà que les nouvelles variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ ne sont pas prises au hasard,

sans quoi le second membre contiendrait, outre les carrés

$$\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2, \quad \left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2, \ldots, \quad \left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2$$

des dérivées de Θ, les doubles produits

$$\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\Theta}{d\rho_2}, \quad \frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d\Theta}{d\rho_i}, \ldots$$

Mais nous admettrons de plus qu'en désignant par

$$\Pi_1^1(\rho), \quad \Pi_2^1(\rho), \quad \Pi_1^2(\rho), \ldots, \quad \Pi_i^i(\rho)$$

de certaines fonctions de ρ, on ait

$$\frac{1}{p}\Pi_1^1(\rho_1) + \frac{1}{p_2}\Pi_2^1(\rho_2) + \ldots + \frac{1}{p_i}\Pi_i^1(\rho_i) = 0,$$

$$\frac{1}{p}\Pi_1^2(\rho_1) + \frac{1}{p_2}\Pi_2^2(\rho_2) + \ldots + \frac{1}{p_i}\Pi_i^2(\rho_i) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{p}\Pi_1^{i-1}(\rho_1) + \frac{1}{p_2}\Pi_2^{i-1}(\rho_2) + \ldots + \frac{1}{p}\Pi_i^{i-1}(\rho_i) = 0.$$

et

$$\frac{1}{p}\Pi_1(\rho_1) + \frac{1}{p_2}\Pi_2(\rho_2) + \ldots + \frac{1}{p_i}\Pi_i(\rho_i) = 1$$

Cela étant, si la valeur de U peut se mettre sous la forme

$$U = \frac{f_1(\rho_1)}{p_1} + \frac{f_2(\rho_2)}{p_2} + \ldots + \frac{f_i(\rho_i)}{p},$$

quelles que soient d'ailleurs les fonctions $f_1(\rho_1), f_2(\rho_2), \ldots, f_i(\rho_i)$, dont chacune ne renferme qu'une seule variable, on aura, pour remplir les conditions demandées, la valeur de Θ qui se déduit des équations suivantes :

$$\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 = \alpha_1\Pi_1^1(\rho_1) + \ldots + \alpha_{i-1}\Pi_1^{i-1}(\rho_1) + 2h\Pi_1(\rho_1) + 2f_1(\rho_1),$$

$$\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 = \alpha_1\Pi_2^1(\rho_2) + \ldots + \alpha_{i-1}\Pi_2^{i-1}(\rho_2) + 2h\Pi_2(\rho_2) + 2f_2(\rho_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2 = \alpha_1\Pi_i^1(\rho_i) + \ldots + \alpha_{i-1}\Pi_i^{i-1}(\rho_i) + 2h\Pi_i(\rho_i) + 2f_i(\rho_i).$$

La démonstration de ce théorème n'a pas besoin de développements. On vérifiera aisément qu'avec la valeur de Θ indiquée les conditions auxquelles on devait satisfaire sont remplies. Mais il reste à trouver les systèmes de variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ qui jouissent des propriétés que nous supposons ici; et la difficulté de cette recherche donne beaucoup de prix au théorème particulier du n° 5, qui fait connaître un de ces systèmes.

14. En disant enfin quelques mots du mouvement de points m, m', m'', etc., unis entre eux par des liaisons exprimables à l'aide d'équations entre les coordonnées, nous nous bornerons au cas où le principe des forces vives a lieu.

Exprimons d'abord, comme le fait Lagrange dans la *Mécanique analytique*, les coordonnées x, y, z, x', y', etc., de tous les points m, m', etc., par des variables indépendantes $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$, de telle manière que les équations de condition données en x, y, z, x', etc., soient satisfaites d'elles-mêmes, le nombre des variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ étant naturellement égal au nombre des coordonnées diminué du nombre des équations de condition. Et supposons ces variables tellement choisies, que la valeur de la force vive soit de la forme

$$p_1\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + p_2\left(\frac{d\rho_2}{dt}\right)^2 + \ldots + p_i\left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2,$$

c'est-à-dire ne contienne que les carrés $d\rho_1^2, d\rho_2^2, \ldots, d\rho_i^2$ des différentielles, affectés de coefficients quelconques $p_1, p_2, \ldots, p_i$, fonctions de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$, et non les rectangles $d\rho_1\, d\rho_2$, $d\rho_1\, d\rho_3$, etc. Soit U la fonction des forces. Les équations du mouvement seront, cette fois,

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d.p_1\frac{d\rho_1}{dt}}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{dp_1}{d\rho_1}\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{dp_i}{d\rho_1}\left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2 + \frac{dU}{d\rho_1},\\
\frac{d.p_2\frac{d\rho_2}{dt}}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{dp_1}{d\rho_2}\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{dp_i}{d\rho_2}\left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2 + \frac{dU}{d\rho_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{d.p_i\frac{d\rho_i}{dt}}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{dp_1}{d\rho_i}\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{dp_i}{d\rho_i}\left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2 + \frac{dU}{d\rho_i};
\end{aligned}\right.$$

mais leurs intégrales continueront à s'exprimer par

$$(25)\qquad \frac{d\Theta}{d\alpha_1} = \beta_1,\quad \frac{d\Theta}{d\alpha_2} = \beta_2, \ldots,\quad \frac{d\Theta}{d\alpha_i} = \beta_{i-1},\quad \frac{d\Theta}{dh} = t + \varepsilon.$$

Θ étant encore une solution complete d'une équation aux différences partielles, savoir de l'équation

$$(26)\qquad \frac{1}{p_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{1}{p_2}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_i}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2 = 2(U + h),$$

qui est toute semblable à l'équation transformée du numéro précédent, en sorte que la solution dont on a besoin s'obtiendra dans les circonstances déjà indiquées, c'est-à-dire lorsqu'on pourra vérifier les équations

$$(27)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{p_1}\Pi_1^1(\rho_1) + \frac{1}{p}\Pi_2^1(\rho_2) + \ldots + \frac{1}{p_i}\Pi_i^1(\rho_i) = 0,\\
\frac{1}{p_1}\Pi_1^2(\rho_1) + \frac{1}{p_2}\Pi_2^2(\rho_2) + \ldots + \frac{1}{p_i}\Pi_i^2(\rho_i) = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{1}{p_1}\Pi_1^{i-1}(\rho_1) + \frac{1}{p_2}\Pi_2^{i-1}(\rho_2) + \ldots + \frac{1}{p_i}\Pi_i^{i-1}(\rho_i) = 0,\\
\frac{1}{p_1}\Pi_1^i(\rho_1) + \frac{1}{p_2}\Pi_2^i(\rho_2) + \ldots + \frac{1}{p_i}\Pi_i^i(\rho_i) = 1.
\end{array}\right.$$

et qu'en outre on aura

$$(28)\qquad U = \frac{f_1(\rho_1)}{p_1} + \frac{f_2(\rho_2)}{p_2} + \ldots + \frac{f_i(\rho_i)}{p_i}.$$

Dans cette hypothese, on pourra toujours déterminer Θ par les formules

$$(29)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 = \alpha_1\Pi_1^1(\rho_1) + \ldots + \alpha_{i-1}\Pi_1^{i-1}(\rho_1) + 2h\Pi_1^i(\rho_1) + 2f_1(\rho_1),\\
\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 = \alpha_1\Pi_2^1(\rho_2) + \ldots + \alpha_{i-1}\Pi_2^{i-1}(\rho_2) + 2h\Pi_2^i(\rho_2) + 2f_2(\rho_2),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2 = \alpha_1\Pi_i^1(\rho_i) + \ldots + \alpha_{i-1}\Pi_i^{i-1}(\rho_i) + 2h\Pi_i^i(\rho_i) + 2f_i(\rho_i).
\end{array}\right.$$

Quant aux intégrales intermédiaires, elles sont

$$(30)\qquad \frac{d\rho_1}{dt}=\frac{1}{p_1}\frac{d\Theta}{d\rho_1},\quad \frac{d\rho_2}{dt}=\frac{1}{p_2}\frac{d\Theta}{d\rho_2},\ldots,\quad \frac{d\rho_i}{dt}=\frac{1}{p_i}\frac{d\Theta}{d\rho_i};$$

et en les combinant avec l'équation aux différences partielles, on en déduit, en particulier, l'intégrale suivante :

$$(31)\qquad p_1\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2+p_2\left(\frac{d\rho_2}{dt}\right)^2+\ldots+p_i\left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2=2(U+h),$$

qui répond au principe des forces vives, et qu'il est d'ailleurs aisé d'obtenir directement. Ce théorème subsiste en analyse pure, quelles que soient les fonctions $p_1, p_2,\ldots, p_i$ de $\rho_1, \rho_2,\ldots, \rho_i$, et lors même que l'on donnerait à ces fonctions des valeurs incompatibles avec la nature de notre problème de dynamique. Il est d'ailleurs analogue à celui du n° 5, et se démontre par des calculs du même genre [*]. En différentiant les équations

$$\frac{d\Theta}{d\alpha_1}=\beta_1,\quad \frac{d\Theta}{d\alpha_2}=\beta_2,\ldots,\quad \frac{d\Theta}{d\alpha_{i-1}}=\beta_{i-1},\quad \frac{d\Theta}{dh}=t+\varepsilon,$$

par rapport à t, dont $\rho_1, \rho_2,\ldots, \rho_i$ sont des fonctions en vertu de ces équations mêmes, on a un premier groupe d'équations, qui, comparé à celui qu'on tire de l'équation aux différences partielles

$$\frac{1}{p_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2+\frac{1}{p_2}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p_i}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2=2(U+h),$$

en la différentiant successivement par rapport aux constantes α_1, $\alpha_2,\ldots, \alpha_{i-1}$, h, donne d'abord les équations intermédiaires

$$p_1\frac{d\rho_1}{dt}=\frac{d\Theta}{d\rho_1},\quad p_2\frac{d\rho_2}{dt}=\frac{d\Theta}{d\rho_2},\ldots,\quad p_i\frac{d\rho_i}{dt}=\frac{d\Theta}{d\rho_i}.$$

Considérons une de celles-ci, la première par exemple. En la différentiant, nous aurons

$$\frac{d.p_1\frac{d\rho_1}{dt}}{dt}=\frac{d^2\Theta}{d\rho_1^2}\frac{d\rho_1}{dt}+\frac{d^2\Theta}{d\rho_1\,d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dt}+\ldots+\frac{d^2\Theta}{d\rho_1\,d\rho_i}\frac{d\rho_i}{dt}.$$

---

[*] Citons à cette occasion un Mémoire de M. J. Binet, inséré dans le *Journal de l'École Polytechnique*.

Mais en différentiant, par rapport à ρ_1, l'équation aux différences partielles

$$\frac{1}{p_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{1}{p_2}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_i}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2 = 2(\mathrm{U} + h),$$

on trouve

$$\frac{1}{p_1}\frac{d\Theta}{d\rho_1}\frac{d^2\Theta}{d\rho_1^2} + \frac{1}{p_2}\frac{d\Theta}{d\rho_2}\frac{d^2\Theta}{d\rho_1\,d\rho_2} + \ldots + \frac{1}{p_i}\frac{d\Theta}{d\rho_i}\frac{d^2\Theta}{d\rho_1\,d\rho_i}$$

$$= \frac{1}{2p_1^2}\frac{dp_1}{d\rho_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{1}{2p_2^2}\frac{dp_2}{d\rho_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2p_i^2}\frac{dp_i}{d\rho_1}\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2 + \frac{d\mathrm{U}}{d\rho_1};$$

d'où l'on conclut, en ayant égard aux équations intermédiaires,

$$\frac{d^2\Theta}{d\rho_1^2}\frac{d\rho_1}{dt} + \frac{d^2\Theta}{d\rho_1\,d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dt} + \ldots + \frac{d^2\Theta}{d\rho_1\,d\rho_i}\frac{d\rho_i}{dt}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{dp_1}{d\rho_1}\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{dp_2}{d\rho_1}\left(\frac{d\rho_2}{dt}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{dp_i}{d\rho_1}\left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2 + \frac{d\mathrm{U}}{d\rho_1}.$$

Donc

$$\frac{d.p_1\frac{d\rho_1}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dp_1}{d\rho_1}\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{dp_i}{d\rho_1}\left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2 + \frac{d\mathrm{U}}{d\rho_1}.$$

C'est la première des équations différentielles du second ordre (24), et l'on arriverait aux autres de la même manière : le théorème est donc démontré.

15. Considérons comme exemple le cas particulier très-simple où les quantités $p_1, p_2, \ldots, p_i$ sont toutes égales entre elles, et où leur valeur commune p est de la forme

$$p = \mathrm{F}_1(\rho_1) + \mathrm{F}_2(\rho_2) + \ldots + \mathrm{F}_i(\rho_i).$$

Il faudra prendre alors

$$\mathrm{U} = \frac{f_1(\rho_1) + f_2(\rho_2) + \ldots + f_i(\rho_i)}{\mathrm{F}_1(\rho_1) + \mathrm{F}_2(\rho_2) + \ldots + \mathrm{F}_i(\rho_i)},$$

et en adoptant cette valeur de U, l'intégration s'effectuera facilement. En effet, on satisfera aux équations de condition (27) entre les fonc-

tions Π en prenant d'abord

$$\Pi^1_1(\rho_1) = F_1(\rho_1), \quad \Pi^1_2(\rho_2) = F_2(\rho_2), \ldots, \quad \Pi^1_i(\rho_i) = F_i(\rho_i),$$

et en donnant aux autres fonctions Π des vaveurs constantes, telles que l'unité positive pour

$$\Pi^1_1(\rho_1), \quad \Pi^2_2(\rho_2), \ldots, \quad \Pi^{i-1}_{i-1}(\rho_{i-1}),$$

l'unité négative pour

$$\Pi^1_2(\rho_2), \quad \Pi^2_3(\rho_3), \ldots, \quad \Pi^{i-1}_i(\rho_i),$$

et zéro pour celles qui restent. La fonction Θ, dont les intégrales dépendent, sera déterminée par les formules

$$\left(\frac{d\Theta}{d\rho_1}\right)^2 = \alpha_1 + 2hF_1(\rho_1) + 2f_1(\rho_1),$$

$$\left(\frac{d\Theta}{d\rho_2}\right)^2 = \alpha_2 - \alpha_1 + 2hF_2(\rho_2) + 2f_2(\rho_2),$$

$$\left(\frac{d\Theta}{d\rho_3}\right)^2 = \alpha_3 - \alpha_2 + 2hF_3(\rho_3) + 2f_3(\rho_3),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{d\Theta}{d\rho_{i-1}}\right)^2 = \alpha_{i-1} - \alpha_{i-2} + 2hF_{i-1}(\rho_{i-1}) + 2f_{i-1}(\rho_{i-1}),$$

$$\left(\frac{d\Theta}{d\rho_i}\right)^2 = -\alpha_{i-1} + 2hF_i(\rho_i) + 2f_i(\rho_i);$$

je me dispenserai d'écrire les intégrales elles-mêmes.

16. Au reste, dans le cas particulier qui précède, et dans quelques autres encore, les équations différentielles proposées (24) peuvent s'intégrer d'une manière à la fois directe et simple par la méthode suivante [*]. En prenant, comme nous le faisons,

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_i = p,$$

---

[*] C'est celle que j'ai employée dans mon premier Mémoire sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer. (*Journal de Mathématiques*, tome XI.)

les équations (24) se réduisent à

$$\frac{d.p\frac{d\rho_1}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dp}{d\rho_1}\left[\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2\right] + \frac{dU}{d\rho_1},$$

$$\frac{d.p\frac{d\rho_2}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dp}{d\rho}\left[\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2\right] + \frac{dU}{d\rho_2},$$

. . . . . .

$$\frac{d.p\frac{d\rho_i}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dp}{d\rho_i}\left[\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2\right] + \frac{dU}{d\rho_i}.$$

et, en ayant égard à l'intégrale connue

$$(31) \qquad p_1\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + p_2\left(\frac{d\rho_2}{dt}\right)^2 + \ldots + p_i\left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2 = 2(U + h),$$

qui devient ici

$$p\left[\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_2}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2\right] = 2(U + h),$$

on met ces équations sous la forme

$$\frac{d.p\frac{d\rho_1}{dt}}{dt} = \frac{1}{p}\frac{dp}{d\rho_1}(U + h) + \frac{dU}{d\rho},$$

$$\frac{d.p\frac{d\rho_2}{dt}}{dt} = \frac{1}{p}\frac{dp}{d\rho_2}(U + h) + \frac{dU}{d\rho},$$

. . . . . .

$$\frac{d.p\frac{d\rho_i}{dt}}{dt} = \frac{1}{p}\frac{dp}{d\rho_i}(U + h) + \frac{dU}{d\rho_i}.$$

Or, considérons l'une quelconque d'entre elles,

$$\frac{d.p\frac{d\rho_s}{dt}}{dt} = \frac{1}{p}\frac{dp}{d\rho_s}(U + h) + \frac{dU}{d\rho};$$

en la multipliant par $2pd\rho_s$, nous en déduirons

$$d.p^2\frac{d\rho_s^2}{dt^2} = 2\frac{d.p(U + h)}{d\rho_s}d\rho_s$$

Si donc la dérivée

$$\frac{d.p(U+h)}{d\rho_s}$$

se réduit à une simple fonction de la variable correspondante ρ_s, l'intégration s'effectuera de suite. Cela aura évidemment lieu dans notre hypothèse de

$$p = F_1(\rho_1) + F_2(\rho_2) + \ldots + F_i(\rho_i),$$
$$U = \frac{f_1(\rho_1) + f_2(\rho_2) + \ldots + f_i(\rho_i)}{F_1(\rho_1) + F_2(\rho_2) + \ldots + F_i(\rho_i)}.$$

et, en l'adoptant, on aura les intégrales suivantes :

$$p^2 \frac{d\rho_1^2}{dt^2} = 2f_1(\rho_1) + 2hF_1(\rho_1) + C_1,$$

$$p^2 \frac{d\rho_2^2}{dt^2} = 2f_2(\rho_2) + 2hF_2(\rho_2) + C_2,$$

. . . . . .

$$p^2 \frac{d\rho_i^2}{dt^2} = 2f_i(\rho_i) + 2hF_i(\rho_i) + C_i,$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_i$ sont des constantes dont la somme doit être nulle à cause de

$$p\left[\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_2}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2\right] = 2(U+h).$$

On satisfera à cette condition en prenant

$$C_1 = \alpha_1, \quad C_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \ldots, \quad C_{i-1} = \alpha_{i-1} - \alpha_{i-2}, \quad C_i = -\alpha_{i-1},$$

et alors $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ désigneront des constantes tout à fait arbitraires.

En égalant entre elles les diverses valeurs de dt qui résultent de nos intégrales, nous aurons

$$dt = \frac{pd\rho_1}{\sqrt{2f_1(\rho_1) + 2hF_1(\rho_1) + C_1}}$$
$$= \frac{pd\rho_2}{\sqrt{2f_2(\rho_2) + 2hF_2(\rho_2) + C_2}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \frac{pd\rho_i}{\sqrt{2f_i(\rho_i) + 2hF_i(\rho_i) + C_i}}.$$

De là on déduira d'abord des équations entre $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_t$, où les variables seront séparées, et qui s'intégreront immédiatement, savoir :

$$\frac{d\rho_1}{\sqrt{2f_1(\rho_1)+2h\mathrm{F}_1(\rho_1)+\mathrm{C}_1}} = \frac{d\rho_2}{\sqrt{2f_2(\rho_2)+2h\mathrm{F}_2(\rho_2)+\mathrm{C}_2}}, \text{ etc.}$$

En mettant ensuite pour p sa valeur dans la formule

$$dt = \frac{p\,d\rho}{\sqrt{2f_1(\rho_1)+2h\mathrm{F}_1(\rho_1)+\mathrm{C}_1}}$$

et transformant le résultat de la substitution à l'aide des équations déja obtenues, on trouvera facilement

$$\begin{aligned} dt = & \frac{\mathrm{F}_1(\rho_1)\,d\rho_1}{\sqrt{2f_1(\rho_1)+2h\mathrm{F}_1(\rho_1)+\mathrm{C}}} \\ & + \frac{\mathrm{F}_2(\rho_2)\,d\rho_2}{\sqrt{2f_2(\rho_2)+2h\mathrm{F}_2(\rho_2)+\mathrm{C}_2}} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{\mathrm{F}_t(\rho_t)\,d\rho_t}{\sqrt{2f_t(\rho_t)+2h\mathrm{F}_t(\rho_t)+\mathrm{C}_t}}. \end{aligned}$$

Ici encore les variables sont séparées. Les intégrales completes qui résultent de ces calculs sont, du reste, les mêmes que donnent les formules du n° **14**.

17 Pour donner un second exemple de cette méthode directe, considérons le cas où $p_1, p_2, \ldots, p_t$ se partagent en deux groupes $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ et $p_{\mu+1}, p_{\mu+2}, \ldots, p_t$, de quantités égales entre elles. Désignons par p la valeur commune des quantités composant le premier groupe, et par q celle des quantités composant le second groupe, en sorte que

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_\mu = p$$

et

$$p_{\mu+1} = p_{\mu+2} = \ldots = p_t = q.$$

Admettons, de plus, que les valeurs de

$$p, \quad p\mathrm{U}, \quad \frac{p}{q}$$

soient de la forme

$$p = F_1(\rho_1) + F_2(\rho_2) + \ldots + F_\mu(\rho_\mu),$$
$$pU = f_1(\rho_1) + f_2(\rho_2) + \ldots + f_\mu(\rho_\mu),$$
$$\frac{p}{q} = \psi_1(\rho_1) + \psi_2(\rho_2) + \ldots + \psi_\mu(\rho_\mu).$$

Je dis qu'on pourra, dans ce cas, intégrer les équations différentielles du second ordre (24).

D'abord les formules du n° **14** sont ici facilement applicables, et il est bien aisé de satisfaire aux équations de condition (27) sur lesquelles la méthode du numéro cité repose. Mais je ne m'arrêterai pas à écrire les valeurs des diverses fonctions Π, et laissant de côté les détails relatifs à ce premier procédé, je ne développerai que les calculs de la méthode d'intégration directe du n° **16**, en ayant soin pourtant de ramener les résultats à la forme même sous laquelle l'autre méthode les donnerait de suite. Cela suffira, en effet, pour rendre manifeste l'accord des deux méthodes.

Les valeurs que nous admettons pour $p_1, p_2, \ldots, p_i$ et U sont toutes indépendantes des dernières variables $\rho_{\mu+1}, \rho_{\mu+2}, \ldots, \rho_i$. D'ailleurs, $p_1, p_2, \ldots, p_i$ forment deux groupes distincts (p) et (q). Cela posé, il est aisé de voir que les équations différentielles (24) se partageront aussi en deux groupes. Pour tout indice s compris dans la série $1, 2, 3, \ldots, \mu$, on aura

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\,p\frac{d\rho_s}{dt}}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{dp}{d\rho_s}\left[\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_2}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_\mu}{dt}\right)^2\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{dq}{d\rho_s}\left[\left(\frac{d\rho_{\mu+1}}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2\right] + \frac{dU}{d\rho_s}, \end{aligned}\right.$$

tandis qu'il viendra, pour les indices suivants :

$$(33)\quad \frac{d.q\frac{d\rho_{\mu+1}}{dt}}{dt} = 0, \quad \frac{d.q\frac{d\rho_{\mu+2}}{dt}}{dt} = 0, \ldots, \quad \frac{d.q\frac{d\rho_i}{dt}}{dt} = 0$$

Ces dernières équations s'intègrent et donnent

$$(34)\quad q\frac{d\rho_{\mu+1}}{dt} = C_{\mu+1}, \quad q\frac{d\rho_{\mu+2}}{dt} = C_{\mu+2}, \ldots, \quad q\frac{d\rho_i}{dt} = C_i,$$

$C_{\mu+1}, C_{\mu+2}, \ldots, C_i$ étant des constantes arbitraires. En posant donc, pour abréger,

$$C_{\mu+1}^2 + C_{\mu+2}^2 + \ldots + C_i^2 = C, \tag{35}$$

et se rappelant l'intégrale

$$p_1\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + p_2\left(\frac{d\rho_2}{dt}\right)^2 + \ldots + p_i\left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2 = 2(U+h), \tag{34}$$

qui devient ici

$$p\left[\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_\mu}{dt}\right)^2\right] + q\left[\left(\frac{d\rho_{\mu+1}}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2\right] = 2(U+h)$$

on en conclura à la fois

$$\left(\frac{d\rho_{\mu+1}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_{\mu+2}}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)^2 = \frac{C}{q^2} \tag{36}$$

et

$$\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_\mu}{dt}\right)^2 = \frac{2(U+h)}{p} - \frac{C}{pq}. \tag{37}$$

Portant donc ces valeurs dans l'équation (32), on aura

$$\frac{d\,p\frac{d\rho_s}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dp}{d\rho_s}\left(\frac{2(U+h)}{p} - \frac{C}{pq}\right) + \frac{1}{2}\frac{dq}{d\rho_s}\frac{C}{q^2} + \frac{dU}{d\rho_s}. \tag{38}$$

et en multipliant tout par $2pd\rho_s$, il viendra enfin

$$d.p^2\frac{d\rho_s^2}{dt^2} = d\rho_s\frac{d}{d\rho_s}\left[2(U+h)p - C\frac{p}{q}\right]. \tag{39}$$

Jusqu'ici, nos calculs subsisteraient en prenant pour p, q et U des fonctions quelconques de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu$. Mais si la composition de ces quantités, ou plutôt de la quantité unique

$$2(U+h)p - C\frac{p}{q},$$

est telle, que le coefficient de $d\rho_s$ dans le second membre soit une fonction de la seule variable ρ_s, il est clair que l'on pourra effectuer de suite une intégration. Or cela arrive pour toutes les valeurs $1, 2, \ldots, \mu$

de s, lorsqu'on prend, comme nous le faisons,

$$p = F_1(\rho_1) + F_2(\rho_2) + \ldots + F_\mu(\rho_\mu),$$
$$pV = f_1(\rho_1) + f_2(\rho_2) + \ldots + f_\mu(\rho_\mu),$$
$$\frac{q}{q} = \psi_1(\rho_1) + \psi_2(\rho_2) + \ldots + \psi_\mu(\rho_\mu).$$

On trouve en effet, alors,

$$d.p^2 \frac{d\rho_s^2}{dt^2} = d\rho_s[2f'_s(\rho_s) + 2hF'_s(\rho_s) - C\psi'_s(\rho_s)],$$

et, par suite, on obtient, en intégrant et donnant successivement à l'indice s toutes les valeurs dont il est susceptible,

$$(40)\quad \begin{cases} p^2 \dfrac{d\rho_1^2}{dt^2} = 2f_1(\rho_1) + 2hF_1(\rho_1) - C\psi_1(\rho_1) + C_1, \\ p^2 \dfrac{d\rho_2^2}{dt^2} = 2f_2(\rho_2) + 2hF_2(\rho_2) - C\psi_2(\rho_2) + C_2. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p^2 \dfrac{d\rho_\mu^2}{dt^2} = 2f_\mu(\rho_\mu) + 2hF_\mu(\rho_\mu) - C\psi_\mu(\rho_\mu) + C_\mu. \end{cases}$$

Les constantes $C_1, C_2, \ldots, C_\mu$ ne sont pas entierement arbitraires; car, en ajoutant ces dernières équations, et comparant le résultat à l'équation (37), il vient

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_\mu = 0.$$

On satisfera à cette équation de condition en prenant

$$C_1 = \alpha_1, \quad C_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \ldots, \quad C_{\mu-1} = \alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu-2}, \quad C_\mu = -\alpha_{\mu-1},$$

et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mu-1}$ seront de véritables constantes arbitraires. J'adopterai désormais ces valeurs de $C_1, C_2, \ldots, C_\mu$, et, de plus, je ferai

$$C_{\mu+1} = \sqrt{\alpha_\mu}, \quad C_{\mu+2} = \sqrt{\alpha_{\mu+1}}, \ldots, \quad C_i = \sqrt{\alpha_{i-1}},$$

et, par conséquent,

$$C = \alpha_\mu + \alpha_{\mu+1} + \ldots + \alpha_{i-1},$$

ce qui aura l'avantage de nous ramener aux constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}, h$

du n° **14**. Les équations (34) deviendront ainsi

$$q\frac{d\rho_{\mu+}}{dt}=\sqrt{\alpha_\mu},\quad q\frac{d\rho_{\mu+2}}{dt}=\sqrt{\alpha_{\mu+1}},\ldots,\quad q\frac{d\rho_i}{dt}=\sqrt{\alpha_{i-1}}.$$

D'un autre côté, en posant, pour abréger,

$$2f_s(\rho_s)+2h\,\mathrm{F}_s(\rho_s)-\mathrm{G}\psi_s(\rho_s)+\mathrm{C}_s=\Phi_s(\rho_s),$$

les équations (40) donneront

$$p\frac{d\rho_1}{dt}=\sqrt{\Phi_1(\rho_1)},\quad p\frac{d\rho_2}{dt}=\sqrt{\Phi_2(\rho_2)},\ldots,\quad p\frac{d\rho_\mu}{dt}=\sqrt{\Phi_\mu(\rho_\mu)}.$$

En égalant les diverses valeurs de dt que toutes ces équations fournissent, on a

$$dt=\frac{q\,d\rho_{\mu+1}}{\sqrt{\alpha_\mu}}=\frac{q\,d\rho_{\mu+2}}{\sqrt{\alpha_{\mu+1}}}=\ldots=\frac{q\,d\rho_i}{\sqrt{\alpha_{i-1}}}$$

et

$$dt=\frac{p\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}}=\frac{p\,d\rho_2}{\sqrt{\Phi_2(\rho_2)}}=\ldots=\frac{p\,d\rho_\mu}{\sqrt{\Phi_\mu(\rho_\mu)}}.$$

On aura donc, entre $\rho_1, \rho_2,\ldots, \rho_\mu$ d'une part, et $\rho_{\mu+1}, \rho_{\mu+2},\ldots, \rho_i$ d'autre part, des équations telles que

$$(41)\qquad \frac{d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}}=\frac{d\rho_2}{\sqrt{\Phi_2(\rho_2)}}=\ldots=\frac{d\rho_\mu}{\sqrt{\Phi_\mu(\rho_\mu)}},$$

et

$$(42)\qquad \frac{d\rho_{\mu+1}}{\sqrt{\alpha_\mu}}=\frac{d\rho_{\mu+2}}{\sqrt{\alpha_{\mu+1}}}=\ldots=\frac{d\rho_i}{\sqrt{\alpha_{i-1}}},$$

lesquelles s'intégreront immédiatement, puisque les variables y sont séparées.

Pour lier le premier groupe au second, et aussi pour obtenir la valeur de t, on partira de

$$dt=\frac{p\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}}=\frac{q\,d\rho_{\mu+1}}{\sqrt{\alpha_\mu}},$$

et, à cause des valeurs de p et $\frac{p}{q}$, on en conclura

$$\frac{d\rho_{\mu+1}}{\sqrt{\alpha_\mu}} = \frac{\psi_1(\rho_1)\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}} + \frac{\psi_2(\rho_2)\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}} + \ldots + \frac{\psi_\mu(\rho_\mu)\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}},$$

et

$$dt = \frac{F_1(\rho_1)\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}} + \frac{F_2(\rho_2)\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}} + \ldots + \frac{F_\mu(\rho_\mu)\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}};$$

d'où, en vertu des formules déjà obtenues,

$$(43)\qquad \frac{d\rho_{\mu+1}}{\sqrt{\alpha_\mu}} = \frac{\psi_1(\rho_1)\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}} + \frac{\psi_2(\rho_2)\,d\rho_2}{\sqrt{\Phi_2(\rho_2)}} + \ldots + \frac{\psi_\mu(\rho_\mu)\,d\rho_\mu}{\sqrt{\Phi_\mu(\rho_\mu)}}.$$

et

$$(44)\qquad dt = \frac{F_1(\rho_1)\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}} + \frac{F_2(\rho_2)\,d\rho_2}{\sqrt{\Phi_2(\rho_2)}} + \ldots + \frac{F_\mu(\rho_\mu)\,d\rho_\mu}{\sqrt{\Phi_\mu(\rho_\mu)}},$$

équations où les variables sont séparées. Quant à $\rho_{\mu+2}, \ldots, \rho_i$, ils s'expriment au moyen de $\rho_{\mu+1}$, en intégrant les formules (42), comme $\rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_\mu$ au moyen de ρ_1, en intégrant les formules (41). Toutefois si l'on veut, on aura encore

$$\frac{d\rho_{\mu+2}}{\sqrt{\alpha_{\mu+1}}} = \frac{\psi_1(\rho_1)\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}} + \frac{\psi_2(\rho_2)\,d\rho_2}{\sqrt{\Phi_2(\rho_2)}} + \ldots + \frac{\psi_\mu(\rho_\mu)\,d\rho_\mu}{\sqrt{\Phi_\mu(\rho_\mu)}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d\rho_i}{\sqrt{\alpha_{i-1}}} = \frac{\psi_1(\rho_1)\,d\rho_1}{\sqrt{\Phi_1(\rho_1)}} + \frac{\psi_2(\rho_2)\,d\rho_2}{\sqrt{\Phi_2(\rho_2)}} + \ldots + \frac{\psi_\mu(\rho_\mu)\,d\rho_\mu}{\sqrt{\Phi_\mu(\rho_\mu)}}.$$

Je n'aurais pas du reste ajouté ces dernières équations, que le système

$$(42)\qquad \frac{d\rho_{\mu+1}}{\sqrt{\alpha_\mu}} = \frac{d\rho_{\mu+2}}{\sqrt{\alpha_{\mu+1}}} = \ldots = \frac{d\rho_i}{\sqrt{\alpha_{i-1}}}$$

remplace avec avantage, si elles ne se présentaient pas d'elles-mêmes, lorsqu'on exprime nos intégrales à l'aide des dérivées d'une certaine fonction Θ. En effet, toutes les intégrales qui résultent de la considération des équations à variables séparées que nous venons d'obtenir,

peuvent s'écrire ainsi

$$\frac{d\Theta}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{d\Theta}{d\alpha_2} = \beta_2, \ldots, \quad \frac{d\Theta}{d\alpha_{i-1}} = \beta_{i-1}, \quad \frac{d\Theta}{dh} = t + \varepsilon$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}, \varepsilon$ étant les constantes introduites par l'intégration, et Θ désignant une certaine fonction de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, h$, savoir :

$$\Theta = \int d\rho_1 \sqrt{\Phi_1(\rho_1)} + \int d\rho_2 \sqrt{\Phi_2(\rho_2)} + \ldots + \int d\rho_\mu \sqrt{\Phi_\mu(\rho_\mu)}$$
$$+ \rho_{\mu+1}\sqrt{\alpha_\mu} + \rho_{\mu+2}\sqrt{\alpha_{\mu+1}} + \ldots + \rho_i \sqrt{\alpha_{i-1}}.$$

C'est à ce même résultat que conduirait l'emploi des formules du n° **14**; car il est aisé de s'assurer que la valeur de Θ vérifie l'équation aux différences partielles (26).

Je pourrais encore ajouter d'autres exemples de nos deux méthodes; mais ce qui précède suffit, et je me réserve d'ailleurs d'y revenir s'il se présente plus tard quelque nouvelle application offrant un intérêt particulier.

THÈSE DE MÉCANIQUE.

Sur les changements instantanés de vitesse qui ont lieu dans un système de points matériels;

PAR M. ED. PHILLIPS,
Ingénieur des Mines.

I.

Le probleme du choc des corps solides, en tenant compte du frottement, n'a pas encore été traité dans le cas le plus général, ou le glissement peut avoir, pendant le choc, une direction quelconque et variable. Poisson, dans sa *Mécanique*, a résolu le cas du choc d'une sphere contre un plan fixe, lorsque la direction du glissement reste constante pendant toute sa durée. M. Coriolis a examiné le cas de deux spheres qui viennent se choquer et a reconnu qu'alors la direction ne variait pas non plus pendant le choc. Nous allons exposer, dans cette These, une méthode qui nous a conduit à la solution de cette question, dans le cas le plus général de deux corps solides de forme quelconque, la direction du glissement pouvant, d'ailleurs, varier pendant le choc, de quelque maniere que ce soit.

Nous nous sommes occupé, en outre, dans cette These, du sujet suivant :

Lorsqu'on veut déterminer le mouvement d'une machine et calculer son effet utile, le plus souvent l'application du principe des forces vives est suffisante, en raison de ce qu'il arrive, en général, que le systeme est à liaisons completes et que le mouvement d'un seul point détermine celui de tous les autres, et, par conséquent, qu'une seule équation fait connaître à la fois les vitesses et les positions simultanées de tous ses points. On sait, d'ailleurs, que dans un systeme quel-

conque, dans lequel il se produit un changement brusque dans les vitesses, par l'effet de chocs ou de la suppression instantanée de tout ou partie de ses liaisons, l'équation des forces vives subit un certain changement dû aux forces vives ainsi perdues et qui forment une somme égale aux forces vives dues aux vitesses perdues ou gagnées instantanément par les différents points. Cette perte, dans le cas des chocs, n'a la valeur précédente que dans le cas tout à fait abstrait de corps complétement dénués d'élasticité. Le théorème qui en résulte, et qui est dû à Carnot, indique qu'en pareil cas les forces mutuelles développées au contact produisent toujours un travail résistant et donnent la valeur de celui-ci sans qu'il soit besoin de connaître les intensités, d'ailleurs variables, de ces actions mutuelles, non plus que les déplacements insensibles de leurs points d'application. Il sert, en outre, quelquefois à déduire pour deux corps qui se choquent, leurs vitesses immédiatement après le choc, de celles qui avaient lieu au commencement de celui-ci.

Il faut d'ailleurs, pour que les principes qui viennent d'être mentionnés soient applicables, que les liaisons du système soient indépendantes du temps, c'est-à-dire qu'elles consistent en ce que certains points seraient ou fixes ou assujettis à rester sur des courbes ou sur des surfaces fixes. S'il n'en était pas ainsi, par exemple si certains points étaient astreints à demeurer sur des surfaces mobiles, l'équation des forces vives, ainsi que le théorème de Carnot, ne pourraient plus être appliqués, parce que l'un et l'autre supposent, qu'à un instant donné, la vitesse absolue de chaque point soit compatible avec les liaisons du système.

Dans ce cas, on peut encore employer le principe des forces vives; mais, alors, il faut l'appliquer au mouvement relatif des différents points par rapport aux surfaces mobiles, et pour cela, faire usage du théorème de Coriolis ou de celui plus général de M. Sturm. Ce dernier théorème est fort utile, principalement dans l'étude des machines hydrauliques, dans lesquelles l'eau se meut sur des aubes ou dans des tuyaux mobiles, comme, par exemple, dans les turbines. Mais, quand on applique le principe des forces vives au mouvement relatif, on n'a pas directement l'équivalent du théorème de Carnot ou de

M. Sturm, c'est-à-dire le changement instantané qui a lieu dans les forces vives relatives, soit par l'effet de chocs, soit par un changement brusque dans les liaisons du système. Il nous a donc semblé qu'il y avait un certain intérêt à combler cette lacune, et nous sommes ainsi parvenu à des formules qui comprennent, comme cas particulier, le théorème de Carnot, et qui, le plus souvent, permettront de conclure les vitesses après le choc de celles qui ont lieu immédiatement avant. Ces formules s'appliquent également aux changements brusques produits dans les vitesses par la suppression ou par l'introduction instantanée de certaines liaisons. On en déduit toutes les équations propres à résoudre le problème général du choc des corps solides, soit mous, soit, au contraire, complétement élastiques.

II.

Problème du choc des corps solides, en tenant compte du frottement.

Poisson, dans sa *Mécanique*, montre comment l'on peut résoudre le problème du choc des corps solides, soit mous, soit parfaitement élastiques, dans le cas le plus général, mais en négligeant le frottement. En tenant compte de celui-ci, il est un cas qui se traite de la même manière; c'est celui où la direction du glissement ne varie pas pendant le choc.

Alors le frottement F se combine avec l'action répulsive mutuelle N, qui agit suivant la normale, et leur résultante est inclinée d'une certaine quantité sur le plan tangent commun. Cet angle peut être regardé comme connu, car l'expérience semble démontrer qu'à chaque instant la quantité de mouvement qui servirait de mesure au frottement est proportionnelle à celle qui mesurerait, pendant le même temps, l'action de la pression normale. La résultante de ces deux forces est donc, d'après cela, inclinée d'un angle connu sur le plan tangent. Dans le cas du frottement de roulement qui est très-faible, on peut le négliger, de sorte que nous supposerons qu'il ne s'agisse que du frottement de glissement. Le glissement ayant lieu suivant la même direction pendant toute la durée du choc, les quantités de mouvement qui mesurent le frottement s'ajoutent, et celui-ci peut être regardé

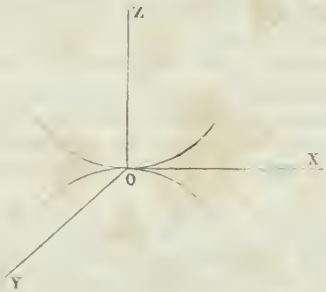
comme ayant eu pour direction constante la droite, dans le plan tangent, suivant laquelle les éléments de contact se séparent dans le mouvement effectif.

Quand le glissement ne conserve pas la même direction pendant toute la durée du choc, toutes les quantités de mouvement élémentaires qui mesurent le frottement à chaque instant sont bien proportionnelles aussi à chaque instant à la quantité de mouvement qui mesure la pression normale pendant le même élément de temps; mais, comme la direction du glissement varie pendant le choc, la quantité de mouvement qui mesure le frottement pendant tout le choc n'est plus égale à la somme des quantités de mouvement élémentaires dont elle est la résultante, de sorte qu'on ne connaît plus rien quant à sa direction ni quant à sa grandeur.

On peut, toutefois, résoudre encore le problème, même dans ce cas le plus général. Voici la méthode que nous avons employée.

Nous supposerons d'abord qu'il s'agisse de deux corps solides entièrement libres dans l'espace et complétement dépourvus d'élasticité.

Soit O le point de contact des deux corps à l'instant du choc, et



soient XOY le plan tangent commun et OZ la normale. Prenons trois axes coordonnés rectangulaires, qui sont la normale OZ et deux droites OX, OY, situées dans le plan tangent. Le mouvement de chacun des deux corps peut être défini par celui du point O appartenant à ce corps et par un mouvement de rotation autour d'un certain axe

instantané passant par ce même point, axe qui sera, en général, différent pour les deux corps. Pour chacun de ceux-ci à un instant quelconque, la vitesse du point O peut être décomposée en trois autres suivant les trois axes, et leur vitesse de rotation peut, de même pour chacun d'eux, être décomposée en trois autres, autour des trois axes coordonnés. Le choc ayant une durée finie, quoique inappréciable à nos sens, nous allons chercher, en tenant compte du frottement, comment ces vitesses varient, pour chaque corps, pendant le choc.

Soient donc, à une époque quelconque de celui-ci, u, v, w les composantes de la vitesse du point O pour l'un des corps, suivant OX, OY et OZ; soient au même instant p, q, r les composantes de sa vitesse angulaire respectivement autour de OX, OY et OZ. Soient en même temps u', v', w'; p', q', r' les mêmes quantités pour l'autre corps. Soit Z, à ce moment, la pression mutuelle qui a lieu au point O, dans le sens de la normale : si f est le coefficient ordinaire du frottement de glissement relatif à la substance des deux corps choquants, nous admettrons que fZ soit la grandeur du frottement.

Or on peut appliquer le principe de d'Alembert pour les quantités de mouvement à une partie quelconque du choc, tout aussi bien qu'à toute sa durée; par conséquent, pendant l'instant infiniment petit dt, il doit y avoir équilibre, pour chaque corps, d'une part, entre les forces Z et fZ qui agissent sur lui, ou plutôt entre les quantités de mouvement qui mesurent, pendant le temps dt, l'action de ces forces, et, d'autre part, entre les quantités de mouvement perdues pendant ce même temps dt, par les différents points matériels qui le composent.

Or, pour le corps qui, sur la figure, est au-dessus du plan tangent, Zdt est la quantité de mouvement qui, pendant le temps dt, mesure la pression normale qu'il éprouve de la part du corps inférieur; $fZdt$ est donc aussi la quantité de mouvement qui mesure le frottement pendant le même intervalle. Cette quantité de mouvement a, dans le plan tangent, une direction qui, en général, n'est pas connue, mais que nous pouvons exprimer au moyen des autres inconnues de la question; car elle est contenue dans le plan normal mené par la direction du glissement à l'instant que l'on considère, et n'est autre, par consé-

quent, que la projection de la direction du glissement sur le plan tangent : or le glissement, faisant avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à $u - u'$, $v - v'$, $w - w'$, sa projection sur le plan tangent fait, avec les axes OX et OY, des angles dont les cosinus sont respectivement égaux à

$$\frac{u - u'}{\sqrt{(u-u')^2 + (v-v')^2}} \quad \text{et à} \quad \frac{v - v'}{\sqrt{(u-u')^2 + (v-v')^2}};$$

et, comme le frottement agit sur chaque corps en sens inverse de son glissement, par rapport à l'autre considéré comme fixe, il s'ensuit que les composantes suivant OX et OY des quantités de mouvement qui mesurent le frottement pendant le temps dt, sont respectivement

$$-\int Z dt \frac{u - u'}{\sqrt{(u-u')^2 + (v-v')^2}} \quad \text{et} \quad -\int Z dt \frac{v - v'}{\sqrt{(u-u')^2 + (v-v')^2}}.$$

D'un autre côté, pour un point quelconque (x, y, z) du corps considéré, les composantes parallèles aux axes provenant de la rotation du mobile sont respectivement $qz - ry$, $rx - pz$, $py - qx$, par rapport à OX, OY et OZ. On a donc celles de sa vitesse absolue en y ajoutant les composantes u, v, w, de la vitesse du point O, ce qui donne

$$u + qz - ry, \quad v + rx - pz, \quad w + py - qx.$$

Dans le temps dt, ces composantes s'accroissent respectivement de leurs différentielles, soit de

$$du + zdq - ydr, \quad dv + xdr - zdp, \quad dw + ydp - xdq.$$

Ces quantités prises en signes contraires, sont les composantes des vitesses perdues. Par conséquent, si m est la masse du point matériel (x, y, z), les composantes de la quantité de mouvement perdue par ce point pendant le temps dt sont respectivement

$$m(-du - zdq + ydr), \quad m(-dv - xdr + zdp),$$
$$m(-dw - ydp + xdq).$$

Établissons maintenant les six équations qui expriment les conditions d'équilibre d'un corps solide libre.

On a ainsi :

$$\int m(-du - zdq + ydr) - \int Zdt \frac{u-u'}{\sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2}} = 0,$$
$$\int m(-dv - xdr + zdp) - \int Zdt \frac{v-v'}{\sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2}} = 0,$$
$$\int m(-dw - ydp + xdq) + Zdt = 0,$$
$$\int mx(-dv - xdr + zdp) - \int my(-du - zdq + ydr) = 0,$$
$$\int mz(-du - zdq + ydr) - \int mx(-dw - ydp + xdq) = 0,$$
$$\int my(-dw - ydp + xdq) - \int mz(-dv - xdr + zdp) = 0.$$

Si l'on appelle x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité du corps auquel se rapportent ces équations, M la masse totale de ce corps, et A, B, C ses moments d'inertie par rapport aux axes OX, OY et OZ, on a

$$\int mx = Mx_1, \quad \int my = My_1, \quad \int mz = Mz_1;$$

puis

$$\int m(y^2+z^2) = A, \quad \int m(x^2+z^2) = B, \quad \int m(x^2+y^2) = C.$$

Les six équations d'équilibre deviennent alors

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&-Mdu - Mz_1\,dq + My_1\,dr - \int Zdt \frac{u-u'}{\sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2}} = 0,\\
&-Mdv - Mx_1\,dr + Mz_1\,dp - \int Zdt \frac{v-v'}{\sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2}} = 0,\\
&-Mdw - My_1\,dp + Mx_1\,dq + Zdt = 0,\\
&-Mx_1\,dv + My_1\,du - Cdr + dp\int mxz + dq\int myz = 0,\\
&-Mz_1\,du + Mx_1\,dw - Bdq + dr\int mzy + dp\int mxy = 0,\\
&-My_1\,dw + Mz_1\,dv - Adp + dq\int myx + dr\int mzx = 0.
\end{aligned}\right.$$

On aura six équations semblables pour le second corps. Seulement,

il faut observer que, pour celui-ci, la force Z et le frottement agissent en sens contraires des mêmes forces pour le premier. Il faut donc changer leur signe, et on aura pour celui-ci,

$$-Zdt, \quad -\int Zdt \frac{u-u'}{\sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2}}$$

et

$$+\int Zdt \frac{v-v'}{\sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2}},$$

au lieu de

$$+Zdt, \quad -\int Zdt \frac{u-u'}{\sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2}}$$

et

$$-\int Zdt \frac{v-v'}{\sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2}}.$$

Du reste, les quantités de mouvement perdues gardent la même forme. Si donc, nous convenons de représenter par les mêmes lettres, avec des accents, ce qui se rapporte au second corps, nous aurons un autre système de six équations :

$$(2)\quad \begin{cases} -M'du' - M'z'_1 dq' + M'y'_1 dr' + \int Zdt \dfrac{u-u'}{\sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2}} = 0, \\ -M'dv' - M'x'_1 dr' + M'z'_1 dp' + \int Zdt \dfrac{v-v'}{\sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2}} = 0, \\ -M'dw' - M'y'_1 dp' + M'x'_1 dq' - Zdt = 0, \\ -M'x'_1 dv' + M'y'_1 du' - C'dr' + dp' \int m'x'z' - dq' \int m'y'z' = 0, \\ -M'z'_1 du' + M'x'_1 dw' - B'dq' + dr' \int m'z'y' + dp' \int m'x'y' = 0, \\ -M'y'_1 du' + M'z'_1 dv' - A'dp' + dq' \int m'y'x' - dr' \int m'z'x' = 0 \end{cases}$$

On a ainsi en tout douze équations entre treize variables, qui sont u, v, w, p, q, r, u', v', w', p', q', r' et Zdt. De cette manière douze quelconques d'entre elles sont susceptibles d'être déterminées en fonctions de la treizieme, en supposant que ces douze soient connues au commencement du choc. On pourrait donc aussi chercher à exprimer les composantes des vitesses en fonctions de Zdt; mais il vaut mieux

introduire une nouvelle variable. A cet effet, posons

$$w - w' = \varepsilon,$$

d'où

$$dw - dw' = d\varepsilon. \tag{3}$$

ε sera, comme on voit, la différence dans le sens de la normale entre les vitesses des points de contact des deux corps. L'équation (3) et les systèmes (1) et (2) constituent treize équations entre quatorze variables, de sorte que toutes les autres sont susceptibles de pouvoir être exprimées en fonction de ε. D'ailleurs les limites de ε sont parfaitement connues, car elles sont $w_0 - w'_0$ au commencement du choc et 0 à la fin, ou à l'instant de la plus grande compression.

Voyons maintenant comment on pourra faire l'élimination. D'abord, la troisième équation du système (1) donne Zdt, dont on peut substituer la valeur dans les autres équations où cette quantité entre. Ensuite, les trois dernières équations du système (1), les quatre dernières du système (2) et l'équation (3), forment huit équations qui peuvent servir à exprimer dw, dp, dq, dr et dw', dp', dq', dr' en fonctions de du, dv, du', dv' et $d\varepsilon$. Substituant ensuite dans les deux premières équations du système (1) et dans les deux premières du système (2), on aura quatre équations de la forme

$$P - P'' \frac{u - u'}{\sqrt{(u - u')^2 + (v - v')^2}} = 0, \tag{4}$$

$$P' - P'' \frac{v - v'}{\sqrt{(u - u')^2 + (v - v')^2}} = 0, \tag{5}$$

$$P_1 + P'' \frac{u - u'}{\sqrt{(u - u')^2 + (v - v')^2}} = 0, \tag{6}$$

$$P'_1 + P'' \frac{v - v'}{\sqrt{(u - u')^2 + (v - v')^2}} = 0, \tag{7}$$

où P, P', P_1, P'_1 et P'' sont cinq expressions, chacune de la forme

$$E du + F dv + G du' + H dv' + K d\varepsilon$$

On peut remplacer ces quatre équations par plusieurs de leurs combinaisons. Ainsi, si l'on ajoute les équations (4) et (6), puis les équations (5) et (7), on a d'abord

$$P + P_1 = 0 \tag{8}$$

et

$$(9) \qquad P' + P'_1 = 0.$$

Ensuite, il est facile de voir que les équations (4) et (5) donnent

$$(10) \qquad P(v - v') = P'(u - u').$$

Les équations (8) et (9) donneront du' et dv' en fonctions de du, dv et $d\varepsilon$, et sous la forme

$$du' = \alpha du + \beta dv + \gamma d\varepsilon$$

et

$$dv' = \lambda du + \mu dv + \nu d\varepsilon,$$

les coefficients α, β, γ, λ, μ et ν étant des constantes.

En intégrant, on aura

$$u' = \text{constante} + \alpha u + \beta v + \gamma\varepsilon$$

et

$$v' = \text{constante} + \lambda u + \mu v + \nu\varepsilon.$$

Substituant dans l'équation (10) et dans l'équation (4), on aura, en appelant Φ, Φ' et Φ'' ce que deviennent par cette substitution P, P' et P'' les deux équations différentielles simultanées du premier ordre entre u, v et ε,

$$(11) \qquad \Phi \times (a + bu + cv + e\varepsilon) = \Phi'(a' + b'u + c'v + e'\varepsilon),$$

$$(12) \qquad \Phi = \Phi'' \frac{a' + b'u + c'v + e'\varepsilon}{\sqrt{(a' + b'u + c'v + e'\varepsilon)^2 + (a + bu + cv + e\varepsilon)^2}}.$$

et Φ, Φ', Φ'' sont de la forme

$$L du + N dv + R d\varepsilon, \quad L' du + N' dv + R' d\varepsilon, \quad L'' du + N'' dv + R'' d\varepsilon,$$

L, N, R, L', N', R', L'', N'', R'' étant des coefficients constants et connus.

Il s'agit maintenant de voir comment on pourra intégrer ces équations.

Pour cela, remplaçons-y Φ, Φ' et Φ'' par leurs valeurs; elles deviennent ainsi

$$(I) \qquad \begin{cases} (L du + N dv + R d\varepsilon)(a + bu + cv + e\varepsilon) \\ = (L' du + N' dv + R' d\varepsilon)(a' + b'u + c'v + e'\varepsilon) \end{cases}$$

et

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{L}\,du + \mathrm{N}\,dv + \mathrm{R}\,d\varepsilon \\ &= (\mathrm{L}''\,du + \mathrm{N}''\,dv + \mathrm{R}''\,d\varepsilon)\,\frac{a' + b'u + c'v + e'\varepsilon}{\sqrt{(a' + b'u + c'v + e'\varepsilon)^2 + (a + bu + cv + e\varepsilon)^2}}. \end{aligned}\right.$$

Introduisons dans ces équations, à la place de u et de v, deux nouvelles variables φ et ψ, déterminées par les deux équations suivantes :

$$(\alpha)\quad \begin{cases} a' + b'u + c'v + e'\varepsilon = \varphi, \\ a + bu + cv + e\varepsilon = \psi. \end{cases}$$

En tirant de ces équations les valeurs de du et de dv et les portant dans les équations (I) et (II), celles-ci deviendront de la forme

$$(\mathrm{III})\qquad \psi(\mathrm{P}\,d\varphi + \mathrm{Q}\,d\psi + \mathrm{S}\,d\varepsilon) = \varphi(\mathrm{P}'\,d\varphi + \mathrm{Q}'\,d\psi + \mathrm{S}'\,d\varepsilon)$$

et

$$(\mathrm{IV})\qquad \mathrm{P}\,d\varphi + \mathrm{Q}\,d\psi + \mathrm{S}\,d\varepsilon = \frac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + \psi^2}}(\mathrm{P}''\,d\varphi + \mathrm{Q}''\,d\psi + \mathrm{S}''\,d\varepsilon).$$

P, Q, S; P′, Q′, S′; P″, Q″, S″ sont des coefficients constants et connus.

En résolvant l'équation (III) par rapport à $d\varepsilon$, on a

$$(\mathrm{V})\qquad d\varepsilon = \frac{\varphi(\mathrm{P}'\,d\varphi + \mathrm{Q}'\,d\psi) - \psi(\mathrm{P}\,d\varphi + \mathrm{Q}\,d\psi)}{\mathrm{S}\psi - \mathrm{S}'\varphi}.$$

Si l'on substitue cette valeur de $d\varepsilon$ dans l'équation (IV), celle-ci devient, en réduisant,

$$(\mathrm{VI})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{S}\varphi(\mathrm{P}'\,d\varphi + \mathrm{Q}'\,d\psi) - \mathrm{S}'\varphi(\mathrm{P}\,d\varphi + \mathrm{Q}\,d\psi)}{\mathrm{S}\psi - \mathrm{S}'\varphi} \\ &= \frac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + \psi^2}} \times \frac{\mathrm{S}\psi(\mathrm{P}''\,d\varphi + \mathrm{Q}''\,d\psi) - \mathrm{S}'\varphi(\mathrm{P}''\,d\varphi + \mathrm{Q}''\,d\psi) + \mathrm{S}''\varphi(\mathrm{P}'\,d\varphi + \mathrm{Q}'\,d\psi) - \mathrm{S}''\psi(\mathrm{P}\,d\varphi + \mathrm{Q}\,d\psi)}{\mathrm{S}\psi - \mathrm{S}'\varphi}. \end{aligned}\right.$$

Cette équation ne contient plus que les deux variables φ et ψ. Elle est satisfaite d'abord par $\varphi = 0$; mais cette valeur n'est pas l'intégrale générale, puisqu'elle ne contient pas de constante arbitraire. En faisant attention à ce qui a été représenté par φ, on voit que $\varphi = u - u'$, et dès lors $\varphi = 0$ répond à $u - u' = 0$. Ce ne peut donc être qu'une valeur particulière de l'intégrale, répondant à l'instant où $u = u'$, ou

bien la solution générale répondant au cas où u serait constamment égal à u', c'est-à-dire où pendant toute la durée du choc, le glissement suivant le plan tangent s'effectuerait suivant la direction constante de l'axe des y. Dans tous les cas, on saura, soit par les autres équations, soit directement par les données, si cette solution est admissible ou non.

De même, l'équation (VI) est satisfaite par $S\psi - S'\varphi = 0$ ou $\varphi = \frac{S}{S'}\psi$: mais ce n'est pas non plus l'intégrale générale, puisqu'il n'y a pas de constante arbitraire. Comme $\varphi = u - u'$ et $\psi = v - v'$, cela répond à $u - u' = \frac{S}{S'}(v - v')$; par conséquent, c'est une valeur particulière de l'intégrale générale, répondant à l'instant où l'on aurait $\frac{u-u'}{v-v'} = \frac{S}{S'}$, ou bien ce serait la solution générale dans le cas où le glissement conserverait une direction constante suivant le plan tangent et déterminée par la relation $\operatorname{tang}\alpha = \frac{v-v'}{u-u'} = \frac{S'}{S}$, α étant l'angle formé par cette direction avec l'axe des x. Cette solution devra être rejetée ou conservée suivant les données particulières de la question.

Pour avoir l'intégrale générale de l'équation (VI), on peut donc diviser ses deux membres par le facteur commun $\frac{\varphi}{S\psi - S'\varphi}$, et elle devient alors

$$\text{(VII)}\quad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{\varphi^2+\psi^2}\,[(SP'-PS')\,d\varphi + (SQ'-QS')\,d\psi] \\ &= [(SP''-PS'')\psi + (P'S''-S'P'')\varphi]\,d\varphi \\ &+ [(SQ''-QS'')\psi + (Q'S''-S'Q'')\varphi]\,d\psi. \end{aligned}\right.$$

Pour intégrer l'équation (VII), introduisons encore à la place de φ et de ψ deux nouvelles variables, ω et δ, qui soient telles que l'on ait

$$\varphi = \omega\cos\delta \quad \text{et} \quad \psi = \omega\sin\delta.$$

On voit que ces nouvelles inconnues ne sont autre chose que la vitesse relative de glissement suivant le plan tangent et l'angle formé par la direction de ce glissement avec l'axe des x. On déduit des relations précédentes,

$$d\varphi = -\omega\sin\delta\,d\delta + \cos\delta\,d\omega$$

et

$$d\psi = \omega \cos\theta d\theta + \sin\theta . d\omega.$$

Substituant les valeurs précédentes à la place de φ, de ψ, de $d\varphi$ et de $d\psi$, dans l'équation (VII), celle-ci devient

$$\omega\,[(SP' - PS')(-\omega \sin\theta d\theta + \cos\theta d\omega) + (SQ' - QS')(\omega \cos\theta d\theta + \sin\theta\, d\omega)]$$
$$= [(SP'' - PS'')\,\omega \sin\theta + (P'S'' - S'P'')\,\omega \cos\theta](-\omega \sin\theta\, d\theta + \cos\theta\, d\omega)$$
$$+ [(SQ'' - QS'')\,\omega \sin\theta + (Q'S'' - S'Q'')\,\omega \cos\theta]\,(\omega \cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, d\omega).$$

Les deux membres de cette équation ont ω pour facteur commun. Elle est donc satisfaite par $\omega = 0$. Mais cette solution, qui répond à une vitesse de glissement nulle, n'est pas l'intégrale générale. Pour avoir celle-ci, divisons par ω les deux membres de l'équation, qui prend alors la forme

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{g \sin\theta - h \cos\theta - i \sin^2\theta + (l - k) \sin\theta \cos\theta + m \cos^2\theta}{g \cos\theta + h \sin\theta - (i + m) \sin\theta \cos\theta - k \cos^2\theta - l \sin^2\theta}\, d\theta,$$

g, h, i, k, l, m étant des coefficients constants et connus. En appelant $f(\theta)$ la fraction qui forme le premier facteur du second membre, et E la base des logarithmes népériens, on voit que

$$\text{(VIII)} \qquad \omega = \omega_0 \, E^{\int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta)\, d\theta},$$

où θ_0 et ω_0 sont les valeurs particulières de θ et de ω au commencement du choc.

Cette intégrale pourra toujours s'obtenir ; car, en faisant $\sin\theta = \tau$, τ étant une inconnue auxiliaire, on aura $f(\theta)d\theta = F(\tau)d\tau$, et $F(\tau)d\tau$ pourra toujours très-facilement être ramenée à la forme d'une fraction rationnelle.

Quant à ε, on l'aura en remplaçant dans (V) φ et ψ, d'abord par leurs valeurs en ω et θ, puis ensuite ω par sa valeur en θ donnée par (VIII), et $d\omega$ par sa valeur $\omega f(\theta)\, d\theta$. En appelant $f_1(\theta)$ une fraction analogue à $f(\theta)$, dont le numérateur et le dénominateur se composent chacun de termes égaux à certains coefficients multipliés par certaines puissances de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, on a

$$d\varepsilon = E^{\int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta)\, d\theta} \times f_1(\theta)\, d\theta$$

et

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} f_1(\theta)\, \mathrm{E}^{\int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta)\, d\theta}\, d\theta.$$

On connaît aussi φ et ψ, puisque $\varphi = \omega \cos\theta$ et $\psi = \omega \sin\theta$.

D'ailleurs la valeur précédente de ε permettra de connaître celle de θ à la fin du choc, puisque alors $\varepsilon = 0$.

Substituant dans les équations (α) à ε, φ et ψ leurs valeurs, on aura celles de u et de v, et on obtiendra ensuite facilement celles de toutes les autres inconnues.

Supposons qu'on veuille examiner en particulier le cas où les axes coordonnés seraient pour chaque corps ses axes principaux relatifs au point de contact, et où, en même temps, chacun d'eux aurait son centre de gravité sur la normale commune au point de contact: on trouverait alors

$$\int mxy = 0, \int mxz = 0, \int myz = 0, \int m'y'x' = 0, \int m'x'z' = 0, \int m'y'z' = 0;$$
$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad x'_1 = 0, \quad y'_1 = 0.$$

Si on applique la méthode générale. et qu'on pose, pour abréger,

$$\frac{M^2}{A} z_1^2 - M = a; \quad \frac{M^2}{B} z_1^2 - M = b; \quad \frac{M'^2}{A'} z_1'^2 - M' = a', \text{ et } \frac{M'^2}{B'} z_1'^2 - M' = b',$$

on arrive à l'équation suivante entre ω et θ,

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{bb'(a+a')\sin^2\theta + aa'(b+b')\cos^2\theta}{[bb'(a+a') - aa'(b+b')]\sin\theta.\cos\theta}\, d\theta,$$

ou, en remplaçant $\cos^2\theta$ par $1 - \sin^2\theta$,

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{aa'(b+b')}{bb'(a+a') - aa'(b+b')} \frac{d(2\theta)}{\sin(2\theta)} + \operatorname{tang}\theta\, d\theta.$$

En intégrant à partir du commencement du choc, on trouve

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \left(\frac{\operatorname{tang}\theta}{\operatorname{tang}\theta_0}\right)^{\frac{aa'(b+b')}{bb'(a+a') - aa'(b+b')}} \times \frac{\cos\theta_0}{\cos\theta}.$$

Supposons, en particulier, qu'il s'agisse du choc de deux sphères, de même volume et de même densité; alors $a = b = a' = b'$, et l'équation précédente donne $\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\theta_0$.

Ce qui indique que, dans ce cas, la direction du glissement ne varie pas pendant toute la durée du choc. Nous retrouvons ici, comme cas particulier, cette conséquence, que l'on trouve démontrée directement dans la théorie mathématique des effets du jeu de billard de M. Coriolis, et qui lui a servi à simplifier beaucoup la plupart des questions de dynamique qu'il a traitées dans cet ouvrage.

Il est même facile de voir que la même chose arriverait encore si deux corps homogènes de révolution venaient se choquer par l'extrémité de l'axe de chacun d'eux. En effet, on aurait alors $A = B$, $A' = B'$, et, par conséquent,

$$a = b \quad \text{et} \quad a' = b' : \text{ des lors, } \quad bb'(a + a') - aa'(a + b') = 0,$$

et, par suite, le glissement conserverait pendant toute la durée du choc sa direction initiale suivant le plan tangent.

La même formule montre que, si $\theta_0 = 0$, on a aussi $\theta = 0$ pendant toute la durée du choc, et, par conséquent, la direction du glissement ne varie pas; c'est ce qui arrivera, en général, quand le glissement commencera suivant une direction qui coïncidera avec celle d'un axe principal commun aux deux corps relativement à leur point de contact.

On aurait pu, pour résoudre le problème, choisir d'autres axes coordonnés, et, en général, des axes quelconques. Les mêmes conditions d'équilibre se seraient toujours exprimées par un même nombre d'équations analogues. Seulement, il serait arrivé que les expressions des composantes de la quantité de mouvement élémentaire du frottement pendant l'instant dt auraient dépendu non-seulement de u, v, u' et v', mais aussi de toutes les autres composantes des vitesses, c'est-à-dire de w, p, q, r: w', p', q' et r'; car la direction du glissement aurait été fonction des vitesses des deux points en contact, et ces vitesses elles-mêmes auraient été exprimées au moyen de toutes ces quantités. Il en résulte que toutes les inconnues seraient entrées dans les équations, non-seulement par leurs différentielles, mais encore directement; en sorte que, pour l'élimination, on aurait été obligé de passer par la différentiation, et qu'on aurait été conduit finalement à des équations différentielles d'un ordre bien plus élevé.

La méthode qui vient d'être exposée, s'applique encore dans le cas

ou il y aurait dans le système un ou plusieurs points fixes. Et même, avec un peu d'attention, il est facile de voir qu'on intègre encore absolument de même les équations différentielles du problème. Il suffit alors de remplacer chaque point fixe par une force convenable, ce qui introduit trois nouvelles inconnues pour chacun d'eux; mais comme, d'un autre côté, la condition que le point correspondant demeure immobile fournit trois nouvelles équations, il s'ensuit que le nombre des équations sera toujours suffisant, et même on pourra par là connaître les pressions ou percussions éprouvées par les points fixes. S'il y avait un ou plusieurs points assujettis à rester chacun sur une courbe donnée, le résultat serait encore le même. On ferait abstraction de chaque courbe, en supposant celle-ci remplacée par une force normale d'une grandeur inconnue : on introduirait par là trois nouvelles inconnues; mais en même temps on aurait trois équations de plus, servant à exprimer, l'une que la force est normale à la courbe, et deux pour exprimer que la vitesse du point correspondant est toujours tangente à cette courbe. Enfin, il en serait encore de même s'il y avait un ou plusieurs points obligés de demeurer sur des surfaces fixes : on remplacerait chaque surface par une force convenable, normale à cette surface, ce qui n'introduirait qu'une inconnue de plus; car si N est la grandeur de cette force, que $F(x, y, z) = 0$ soit l'équation de la surface, que ξ, η, ζ soient les coordonnées du point en question, et que l'on ait

$$V = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dF}{d\zeta}\right)^2}},$$

on aurait $NV\frac{dF}{d\xi}$, $NV\frac{dF}{d\eta}$ et $NV\frac{dF}{d\zeta}$ pour les composantes de N parallèles à OX, OY et OZ. On aurait en même temps une équation nouvelle servant à exprimer que la vitesse du point (ξ, η, ζ) est tangente à la surface en question; cette équation serait

$$\frac{dF}{d\xi} \times \frac{d\xi}{dt} + \frac{dF}{d\eta} \times \frac{d\eta}{dt} + \frac{dF}{d\zeta} \times \frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

Or $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ sont des fonctions connues de la vitesse absolue du point de contact du corps auquel appartient le point (ξ, η, ζ), et de

la vitesse de rotation de ce corps autour de l'axe instantané qui passe par son point de contact.

On voit encore, avec un peu d'attention, que, dans le cas d'un ou de plusieurs points assujettis à rester sur des courbes ou sur des surfaces fixes, on peut intégrer les équations différentielles du problème absolument de la même manière, de sorte que la méthode qui a été exposée est tout à fait générale.

En tenant compte du frottement, nous avons supposé que les deux corps choquants étaient complétement dépourvus d'élasticité, puisque nous avons pris o pour la valeur de ε à la fin du choc. Si les corps étaient, au contraire, parfaitement élastiques, ce nouveau problème se ramènerait au précédent de la manière suivante : on fractionnerait le choc en deux parties, l'une depuis le commencement jusqu'à l'instant de la plus grande compression, alors que les vitesses des éléments de contact sont les mêmes pour les deux corps, dans le sens de la normale commune.

On calculerait ainsi les vitesses u_1, v_1, w_1, p_1, q_1, r_1, u'_1, v'_1, etc., qui ont lieu au moment de la plus grande compression, ainsi que $\int Z dt$ au même moment. La seconde période commencerait alors, et finirait au moment où les deux corps se séparent; elle comprendrait un second choc, pour lequel on aurait des équations analogues à celles de la première période. Seulement ici ε serait o au commencement du choc, et sa valeur finale serait inconnue. On conçoit néanmoins qu'à l'aide des équations différentielles on puisse exprimer les vitesses finales u_2, v_2, w_2, p_2, q_2, etc., en fonctions de la valeur finale ε_2 de ε, car ce sont toujours les mêmes équations différentielles, et elles s'intègrent de la même manière.

On pourra de même exprimer pour la seconde période $\int Z dt$ en fonction de ε_2; or, si les deux corps sont supposés parfaitement élastiques, $\int Z dt$ doit avoir la même valeur pour la seconde période que pour la première, d'où résultera une équation qui déterminera la valeur de ε_2, et, par suite, pourra servir à exprimer les différentes vitesses u_2, v_2, w_2, etc., qui ont lieu à la fin du choc en fonction de quantités toutes connues.

Si les corps n'étaient, comme cela arrive à peu près toujours, qu'imparfaitement élastiques, alors $\int Z dt$, dans la seconde période, ne serait qu'une fraction de ce qu'est cette quantité de mouvement pendant la première, attendu que chaque corps ne reprendrait pas exactement, après le choc, la forme qu'il avait auparavant.

III.

Formules qui donnent les pertes de forces vives relatives dans les chocs de corps solides non élastiques, et dans les changements brusques de liaisons d'un corps solide.

Il a été dit que, dans les changements brusques de vitesses produits par des chocs, il y avait toujours perte de force vive, et que cette perte était égale pour des corps complétement privés d'élasticité, et en supposant les frottements négligeables, à la force vive due aux vitesses perdues ou gagnées par les différents points des deux corps. C'est le théorème de Carnot qu'on peut démontrer fort simplement de la manière suivante:

Soient, à l'époque t, N et F les actions mutuelles qui s'exercent au contact des deux corps, suivant la normale et dans le plan tangent; la seconde force n'est autre que le frottement. Pour un déplacement virtuel compatible avec les liaisons du système, soient respectivement δn et δf ceux des points d'application des forces N et F. Les moments virtuels des quantités de mouvement élémentaires qui les mesurent pendant l'instant suivant dt sont

$$N\delta n \cos(N, \delta n)\, dt \quad \text{et} \quad -F\delta f \cos(F, \delta f)\, dt.$$

Comme δn et δf peuvent être regardés comme constants pendant tout le choc, les moments virtuels des quantités de mouvement qui mesurent les forces N et F pendant toute la durée du choc sont respectivement

$$\sum \delta n \int N \cos(N, \delta n)\, dt \quad \text{et} \quad -\sum \delta f \int F \cos(F, \delta f)\, dt;$$

le signe $\int$ comprend toute la durée du choc, et le signe $\sum$ l'ensemble des termes dus aux différents contacts.

Soient d'ailleurs δx, δy, δz les projections sur les axes coordonnés du déplacement virtuel du point (x, y, z); appelons $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$ et $\frac{dz_0}{dt}$ les composantes de la vitesse de ce point immédiatement avant le choc, et soient $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$ ce que deviennent ces composantes aussitôt après: si m est la masse de ce point matériel, les composantes de la quantité de mouvement qu'il a perdue sont

$$m\left(\frac{dx_0}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right), \quad m\left(\frac{dy_0}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right), \quad m\left(\frac{dz_0}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right).$$

Or, puisqu'il y a équilibre entre ces quantités de mouvement et celles qui mesurent les forces N et F pendant le même intervalle de temps, il s'ensuit que

$$\sum \delta n \int \mathrm{N} \cos(\mathrm{N}, \delta n)\, dt - \sum \delta f \int \mathrm{F} \cos(\mathrm{F}, \delta f)\, dt$$
$$= \sum m\left[\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_0}{dt}\right)\delta x + \left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_0}{dt}\right)\delta y + \left(\frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_0}{dt}\right)\delta z\right].$$

Supposons maintenant qu'on choisisse, pour déplacements virtuels des différents points du système, ceux qui répondent aux vitesses qui ont lieu immédiatement après le choc, et qui sont compatibles avec les liaisons du système; alors

$$\delta x = dx_1, \quad \delta y = dy_1, \quad \delta z = dz_1.$$

De plus, en désignant par dn_1 et df_1 le rapprochement des deux corps dans le sens de la normale, et l'étendue du glissement dans le plan tangent, qui ont réellement lieu à la fin du choc, les termes du premier membre de l'équation précédente deviennent respectivement

$$\sum dn_1 \int \mathrm{N} \cos(\mathrm{N}, dn_1)\, dt \quad \text{et} \quad -\sum df_1 \int \mathrm{F} \cos(\mathrm{F}, df_1)\, dt,$$

et l'équation entière se transforme en celle-ci, après avoir tout divisé par dt,

$$\sum \frac{dn_1}{dt} \int \mathrm{N} \cos(\mathrm{N}, dn_1)\, dt - \sum \frac{df}{dt} \int \mathrm{F} \cos(\mathrm{F}, df_1)\, dt$$
$$= \sum m\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx_1 dx_0}{dt^2} + \frac{dy_1 dy_0}{dt^2} + \frac{dz_1 dz_0}{dt^2}\right)\right].$$

Si les deux corps, après le choc, ont, au point de contact, des vitesses égales dans le sens de la normale commune, alors $\frac{dn_1}{dt} = 0$, et le premier terme du premier membre disparaît. Si le frottement est négligeable, le second terme disparaît aussi, et l'on a simplement

$$(1) \qquad 0 = \sum m\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx_1 dx_0}{dt^2} + \frac{dy_1 dy_0}{dt^2} + \frac{dz_1 dz_0}{dt^2}\right)\right].$$

Mais, d'un autre côté, on a identiquement

$$(\mathrm{II}) \left\{ \begin{aligned} &\sum m\left[\left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right] \\ &= \sum m \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{dx_0 - dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_0 - dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_0 - dz_1}{dt}\right)^2 \\ &- 2\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx_1 dx_0}{dt^2} + \frac{dy_1 dy_0}{dt^2} + \frac{dz_1 dz_0}{dt^2}\right)\right] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right.$$

A cause de (1), cette dernière équation se réduit, en appelant V_0 et V_1 les vitesses du point m immédiatement avant et après le choc, et U la vitesse perdue ou gagnée par ce point, à

$$\sum m V_0^2 - \sum m V_1^2 = \sum m U^2.$$

En appelant T le travail résistant dû à la compression des deux corps produite par leurs actions mutuelles, on a

$$2T = \sum m V_1^2 - \sum m V_0^2 = -\sum m U^2.$$

Si les deux corps, après le choc, n'avaient pas des vitesses égales dans le sens de la normale commune, et si les frottements n'étaient pas négligeables, on aurait deux termes de plus, et l'on trouverait de même

$$\sum m V_1^2 - \sum m V_0^2,$$

ou

$$2T = -\sum m U^2 + 2\sum \frac{dn_1}{dt}\int N \cos(N, dn_1)\, dt - 2\sum \frac{df}{dt}\int F \cos(F, df_1)\, dt$$

Si les deux corps ont, après le choc, des vitesses égales dans le sens

de la normale commune au point de contact; que, cependant, on veuille tenir compte du frottement, mais que l'on sache que la direction du glissement n'a pas varié pendant toute la durée du choc, alors on a

$$\cos(F, df_1) = 1$$

et

$$\sum mV_1^2 - \sum mV_0^2, \quad \text{ou} \quad 2T = -\sum mU^2 - 2\sum \frac{df_1}{dt}\int F dt.$$

IV.

Il se produit une perte de force vive tout à fait semblable dans un corps que l'on assujettit brusquement à un nouveau système de liaisons. Ainsi, dans ce cas, les quantités de mouvement perdues par les différents points matériels dans ce changement instantané doivent se faire équilibre entre elles à l'aide des deux systèmes de liaisons, celles qui existaient primitivement et celles qui ont été ajoutées. Par conséquent, si δx, δy, δz sont les projections sur les axes pour le point (x, y, z) d'un déplacement virtuel compatible avec les deux systèmes de liaisons, on a, en conservant les mêmes notations que pour le théorème de Carnot,

$$\sum m\left[\left(\frac{dx_0}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)\delta x + \left(\frac{dy_0}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right)\delta y + \left(\frac{dz_0}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right)\delta z\right] = 0.$$

On peut prendre, pour ces déplacements virtuels, ceux qui répondent aux vitesses qu'ont les différents points immédiatement après l'introduction des nouvelles liaisons, car ces déplacements sont compatibles avec les deux systèmes de liaisons; cela revient à faire, dans l'équation ci-dessus, $\delta x = dx_1$, $\delta y = dy_1$ et $\delta z = dz_1$, et cette équation devient, en divisant tout par dt,

$$\sum m\left[\left(\frac{dx_0}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)\frac{dx_1}{dt} + \left(\frac{dy_0}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right)\frac{dy_1}{dt} + \left(\frac{dz_0}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right)\frac{dz_1}{dt}\right] = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sum mUV_1 \cos(U, V_1) = 0.$$

Mais V_0 étant la résultante de U et de V_1, on a directement

$$\sum m V_0^2 = \sum m V_1^2 + \sum m U^2 + 2 \sum m U V_1 \cos(U, V_1),$$

ce qui, à cause de l'équation précédente, se réduit à

$$\sum m V_0^2 - \sum m V_1^2 = \sum m U^2.$$

Inversement, si l'on vient à supprimer brusquement tout ou partie des liaisons d'un système, il y a gain de force vive égal à la force vive due aux vitesses perdues ou gagnées par les différents points.

Ce théorème se démontre d'une maniere tout à fait analogue, et l'on trouve

$$\sum m V_1^2 - \sum m V_0^2 = \sum m U^2.$$

Ainsi, quand des liaisons viennent à être brusquement supprimées, il y a toujours gain de force vive.

V.

Le théorème de Carnot, et ceux analogues sur les liaisons, donnent les forces vives gagnées ou perdues brusquement dans les circonstances correspondantes. Nous allons maintenant voir ce que deviennent ces théorèmes quand on les applique au mouvement relatif, c'est-à-dire que nous allons chercher quelle est l'expression supplémentaire répondant à $-\frac{1}{2}\sum m U^2$ dans le mouvement absolu, et qu'il faudrait introduire dans l'équation des forces vives pour les mouvements relatifs, dans le cas de chocs ou de modification instantanée dans le systeme des liaisons établies. En un mot, nous allons chercher, pour le mouvement relatif, l'équivalent du théorème de Carnot pour le mouvement absolu.

A cet effet, conservons les mêmes notations que précédemment pour la démonstration du théorème de Carnot. On aura encore, pour tout déplacement virtuel $(\delta x, \delta y, \delta z)$ compatible avec les liaisons du système,

$$\sum \delta n \int N \cos(N, \delta n)\, dt - \sum \delta f \int F \cos(F, \delta f)\, dt$$
$$= \sum m \left[\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_0}{dt}\right) \delta x + \left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_0}{dt}\right) \delta y + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_0}{dt}\right) \delta z \right].$$

Supposons maintenant que la vitesse absolue V_1 de chaque point ait été décomposée en deux autres V_r et V_m, et désignons les composantes de ces vitesses à un instant quelconque par $\frac{d_r x}{dt}$, $\frac{d_r y}{dt}$, $\frac{d_r z}{dt}$; $\frac{d_m x}{dt}$, $\frac{d_m y}{dt}$, $\frac{d_m z}{dt}$, en affectant plus particulièrement ces composantes des indices 0 ou 1, lorsqu'elles se rapportent au commencement ou à la fin du choc.

Supposons que, pour chaque point du système, la composante finale V_r, réponde à un déplacement virtuel compatible avec les liaisons du système, et appliquons l'équation précédente à ce déplacement virtuel. En divisant tout par dt, l'équation précédente deviendra

$$\sum \frac{d_r n_1}{dt} \int N \cos(N, d_r n_1)\, dt - \sum \frac{d_r f_1}{dt} \int F \cos(F, d_r f_1)\, dt$$
$$= \sum m \left[\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_0}{dt} \right) \frac{d_r x_1}{dt} + \left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_0}{dt} \right) \frac{d_r y_1}{dt} + \left(\frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_0}{dt} \right) \frac{d_r z_1}{dt} \right].$$

Si, après le choc, et en ne tenant compte que des vitesses relatives, les points de contact ont des vitesses égales dans le sens de la normale commune, alors $\frac{d_r n_1}{dt} = 0$, et le premier terme du premier membre de l'équation précédente disparaît. Le second terme de l'équation précédente disparaît aussi si les frottements sont négligeables, de sorte que le premier membre devient nul. Dans ce cas, l'équation ci-dessus revient à

$$(1) \qquad \sum m U V_{r_1} \cos(U, V_{r_1}) = 0,$$

U étant la vitesse absolue perdue par le point m. Or, si U_r et U_m sont les composantes perdues par ce même point respectivement par rapport à V_r et V_m, U est la résultante de U_r et de U_m, de sorte que

$$\sum m U V_{r_1} \cos(U, V_{r_1}) = \sum m U_r V_{r_1} \cos(U_r, V_{r_1}) + \sum m U_m V_{r_1} (U_m, V_{r_1});$$

et, par suite,

$$(2) \qquad \sum m U_r V_{r_1} \cos(U_r, V_{r_1}) = -\sum m U_m V_{r_1} \cos(U_m, V_{r_1}).$$

Mais, d'un autre côté, V_{r_1} étant la résultante de V_{r_1} et de U_r, on a directement

$$V_{r_1}^2 = V_{r_1}^2 + U_r^2 + 2 U_r V_{r_1} \cos(U_r, V_{r_1});$$

l'on

$$\sum m V_{r_0}^2 - \sum m V_{r_1}^2 = \sum m U_r^2 + 2 \sum m U_r V_{r_1} \cos(U_r, V_{r_1}).$$

Remplaçant dans cette équation $\sum m U_r V_{r_1} \cos(U_r, V_{r_1})$ par sa valeur tirée de (2), on a

$$(3) \quad \sum m V_{r_0}^2 - \sum m V_{r_1}^2 = \sum m U_r^2 - 2 \sum m U_m V_{r_1} \cos(U_m, V_{r_1}).$$

Cette équation (3) donne l'équivalent, pour le mouvement relatif, de ce qu'est le théorème de Carnot pour le mouvement absolu. On voit que, dans un choc entre corps dépourvus d'élasticité, la perte de force vive relative est encore égale à la force vive due aux vitesses relatives perdues ou gagnées par les différents points, moins un terme de correction qui est égal à la somme des doubles produits des quantités de mouvement perdues par rapport aux autres composantes V_m par les projections sur ces vitesses perdues des vitesses relatives finales V_{r_1}.

Si les autres composantes V_m répondaient aussi à des déplacements virtuels compatibles avec les liaisons du système, et que par rapport à elles seules, les points de contact eussent aussi, après le choc, des vitesses égales dans le sens de la normale commune, on aurait de même

$$(4) \quad \sum m V_{m_0}^2 - \sum m V_{m_1}^2 = \sum m U_m^2 - 2 \sum m U_r V_{m_1} \cos(U_r, V_{m_1}).$$

Les équations (1), (3), (4) expriment toutes la même propriété, car on peut les déduire les unes des autres. Elles supposent seulement deux conditions essentielles : l'une que les vitesses V_r sont, pour chaque point, compatibles avec un même déplacement virtuel du système; ensuite, qu'après le choc et en ne tenant compte que de ces composantes, les vitesses du point de contact estimées suivant la normale

commune soient égales pour les deux corps. Nous exposerons plus loin comment l'on peut satisfaire d'une manière très-générale à ces deux conditions, entre deux corps solides, soit complétement privés d'élasticité, soit, au contraire, parfaitement élastiques.

En supposant ces deux conditions remplies, on voit que la perte de force vive relative peut avoir, dans certains cas, la même forme que la perte de force vive absolue.

C'est ce qui arrivera quand on aura

$$\sum m\, U_m\, V_{r_1} \cos(U_m, V_{r_1}) = 0.$$

1°. En premier lieu, si $V_m = 0$, on a $V_r = V$, $U_m = 0$, pour chaque point, et l'équation (3) donne

$$\sum m\, V_0^2 - \sum m\, V_1^2 = \sum m\, U^2,$$

qui n'est autre chose que le théorème de Carnot.

2°. Si $U_m = 0$, c'est-à-dire si les composantes V_m de chaque point ne sont pas altérées par le choc.

3°. Si les composantes V_r et V_m sont constamment parallèles à deux axes rectangulaires, $\cos(U_m, V_{r_1}) = 0$ pour chaque point, et

$$\sum m\, V_{r_0}^2 - \sum m\, V_{r_1}^2 = \sum m\, U_r^2.$$

4°. La même chose a lieu si on peut décomposer la vitesse de chaque point en trois autres constamment parallèles à trois axes rectangulaires. On a, relativement à chaque composante,

$$\cos(U_m, V_{r_1}) = 0$$

et

$$\sum m\, V_{r_0}^2 - \sum m\, V_{r_1}^2 = \sum m\, U_r^2.$$

5°. Si $V_{r_1} = 0$ pour chaque point, on a

$$\sum m\, V^2 = \sum m\, U_r^2 : \quad \text{et en effet.} \quad U_r = V_r.$$

6°. Enfin, il peut arriver que $\sum m\, U_m\, V_{r_1} \cos(U_m, V_{r_1})$ soit nulle, sans qu'on ait $U_m\, V_{r_1} \cos(U_m, V_r) = 0$ pour chaque point.

Si le frottement n'était pas négligeable, au lieu d'avoir

$$\sum m\,\mathrm{U}\mathrm{V}_r \cos(\mathrm{U}, \mathrm{V}_r) = 0,$$

on aurait eu

$$\sum m\,\mathrm{U}\mathrm{V}_{r_1} \cos(\mathrm{U}, \mathrm{V}_{r_1}) = \sum \frac{d_r f_1}{dt} \int \mathrm{F} \cos(\mathrm{F}, d_r f_1)\, dt$$

et

$$\sum m\,\mathrm{U}_r \mathrm{V}_{r_1} \cos(\mathrm{U}_r, \mathrm{V}_{r_1}) = -\sum m\,\mathrm{U}_m \mathrm{V}_{r_1} \cos(\mathrm{U}_m, \mathrm{V}_{r_1})$$
$$+ \sum \frac{d_r f_1}{dt} \int \mathrm{F} \cos(\mathrm{F}, d_r f_1)\, dt,$$

puis enfin,

$$\sum m\,\mathrm{V}_r^2 - \sum m\,\mathrm{V}_{r_1}^2 = \sum m\,\mathrm{U}_r^2 - 2\sum m\,\mathrm{U}_m \mathrm{V}_{r_1} \cos(\mathrm{U}_m, \mathrm{V}_{r_1})$$
$$+ 2\sum \frac{d_r f}{dt} \int \mathrm{F} \cos(\mathrm{F}, d_r f_1)\, dt.$$

VI.

Avant de passer à l'examen des conséquences qu'on peut tirer de ce théorème sur les forces vives relatives, nous allons faire voir qu'il s'applique absolument de même aux changements instantanés de vitesse qui sont produits dans un système de points matériels par l'introduction ou la suppression brusque de certaines liaisons.

Supposons d'abord que de nouvelles liaisons viennent à être introduites subitement. En conservant encore les notations qui ont été adoptées plus haut pour la démonstration du théorème analogue, par rapport aux vitesses absolues, on aura de même

$$\sum m \left[\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx}{dt}\right)\delta x + \left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{dy}{dt}\right)\delta y + \left(\frac{dz_1}{dt} - \frac{dz}{dt}\right)\delta z \right] = 0.$$

Supposons maintenant qu'on ait décomposé la vitesse absolue V de chaque point en deux autres V_r et V_m, telles que l'une d'elles, au moins V_r, réponde pour chaque point à un déplacement virtuel compatible avec les deux systèmes de liaisons : celles qui existaient primitivement et celles qui ont été ajoutées postérieurement. On peut donc prendre pour δx, δy et δz, respectivement $d_r x_1$, $d_r y_1$ et $d_r z_1$, en appelant $\frac{d_r x}{dt}$, $\frac{d_r y}{dt}$, $\frac{d_r z}{dt}$ les composantes de la vitesse relative finale V

du point (x, y, z). L'équation précédente devient alors, en divisant tout par dt,

$$\sum m\left[\left(\frac{dx_0}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\right)\frac{d_r x}{dt}+\left(\frac{dy_0}{dt}-\frac{dy_1}{dt}\right)\frac{d_r y}{dt}+\left(\frac{dz_0}{dt}-\frac{dz_1}{dt}\right)\frac{d_r z}{dt}\right]=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sum m\,\mathrm{U}\mathrm{V}_{r_1}\cos(\mathrm{U}, \mathrm{V}_{r_1})=0,$$

U étant la vitesse absolue perdue par chaque point. La démonstration se termine maintenant comme pour les chocs. On déduit de l'équation précédente,

$$\sum m\,\mathrm{U}_r\,\mathrm{V}_r\cos(\mathrm{U}_r, \mathrm{V}_{r_1})=-\sum m\,\mathrm{U}_m\,\mathrm{V}_{r_1}\cos(\mathrm{U}_m, \mathrm{V}_{r_1}).$$

D'ailleurs, on a directement, puisque V_{r_0} est la résultante de V_{r_1} et de U_r,

$$\sum m\,\mathrm{V}_r^2-\sum m\,\mathrm{V}_{r_1}^2=\sum m\,\mathrm{U}_r^2+2\sum m\,\mathrm{U}_r\,\mathrm{V}_{r_1}\cos(\mathrm{U}_r, \mathrm{V}_{r_1}).$$

Par conséquent, on a aussi

$$\sum m\,\mathrm{V}_r^2-\sum m\,\mathrm{V}_{r_1}^2=\sum m\,\mathrm{U}_r^2-2\sum m\,\mathrm{U}_m\,\mathrm{V}_{r_1}\cos(\mathrm{U}_m, \mathrm{V}_{r_1}).$$

C'est, comme on voit, la même équation que pour les chocs, et la seule condition pour qu'elle puisse être appliquée, est que les composantes V_{r_1} répondent à des déplacements virtuels compatibles avec toutes les liaisons du système.

Outre les applications qu'on pourrait faire de ce théorème, pour déterminer les vitesses des différents points d'un système, immédiatement après l'introduction brusque de certaines liaisons, on peut en tirer aussi quelques conséquences générales.

En premier lieu, supposons que, dans un corps solide en mouvement, la vitesse V de chaque molécule soit décomposée en deux autres, V_r et V_m, telles que le système des composantes V_{r_1} réponde à des déplacements virtuels compatibles avec les liaisons existantes, et telles en outre qu'on puisse, par l'introduction brusque de certaines liaisons convenables, détruire toutes les composantes V_r sans changer

les composantes V_m; alors les vitesses V_r deviennent nulles, et les composantes V_m restent seules sans altération. A cause de

$$\sum m\, UV_{r_1} \cos(U, V_{r_1}) = 0,$$

on a donc

$$\sum m\, V_r V_m \cos(V_r V_m) = 0.$$

D'ailleurs, V étant la résultante de V_r et de V_m, on a

$$\sum m\, V^2 = \sum m\, V_r^2 + \sum m\, V_m^2 + 2 \sum m\, V_r V_m \cos(V_r, V_m);$$

donc

$$\sum m\, V^2 = \sum m\, V_m^2 + \sum m\, V_r^2.$$

Ainsi, supposons qu'un corps solide libre soit animé d'un mouvement quelconque dans l'espace; on peut concevoir la vitesse V de chaque point comme la résultante de la vitesse actuelle de translation u du centre de gravité de ce corps, et de sa vitesse de rotation ω autour d'un certain axe instantané passant par le centre de gravité. On sait, de plus, que si l'on venait tout à coup à fixer le centre de gravité, le mouvement de rotation du corps continuerait immédiatement après sans altération autour du même axe instantané; par conséquent, on peut détruire les composantes u, sans changer ω ni en grandeur ni en direction. Il résulte de là que, M étant la masse totale du corps et A son moment d'inertie autour de cet axe instantané, on a

$$\sum m V^2 = M u^2 + A\omega^2,$$

c'est-à-dire qu'à un instant quelconque la force vive du corps est égale à la force vive due à la vitesse de translation de son centre de gravité et à sa masse totale, plus la force vive due au mouvement de rotation autour de l'axe instantané passant par le centre de gravité au moment que l'on considère.

Une autre conséquence du même théorème est la suivante. Dans l'équation générale des forces vives pour les mouvements relatifs, on sait qu'il existe un terme de correction qui est égal à

$$-\sum P_m V_r dt \cos(P_m, V_r).$$

Dans ce terme, V_r représente la composante qui se rapporte au mouvement relatif, et P_m est la force qui serait susceptible de donner à chaque point, s'il était libre, le mouvement dû aux autres composantes V_m. Cela étant, nous allons faire voir que, toutes les fois qu'on pourra, par un système de liaisons convenable, détruire les composantes V_r sans altérer les composantes V_m ou *vice versâ*, on aura

$$-\sum P_m V_r\,dt\cos(P_m, V_r) = \sum P_r V_m\,dt\cos(P_r, V_m),$$

en sorte qu'on pourra former le terme de correction, à volonté, de l'une quelconque de ces deux sommes.

Soient, en effet, u_r, v_r, w_r les composantes de V_r, et u_m, v_m, w_m celles de V_m, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}P_m V_r\cos(P_m, V_r) &= \frac{du_m}{dt}u_r + \frac{dv_m}{dt}v_r + \frac{dw_m}{dt}w_r \\
&= \frac{d}{dt}(u_r u_m + v_r v_m + w_r w_m) - \left(\frac{du_r}{dt}u_m + \frac{dv_r}{dt}v_m + \frac{dw_r}{dt}w_m\right) \\
&= \frac{d}{dt}V_r V_m\cos(V_r V_m) - \frac{1}{m}P_r V_m\cos(P_r V_m).
\end{aligned}$$

Il résulte de là que

$$\begin{aligned}
-\sum P_m V_r\,dt\cos(P_m, V_r) = &-\sum\frac{d}{dt}[m V_r V_m\cos(V_r, V_m)] \\
&+\sum P_r V_m\,dt\cos(P_r V_m);
\end{aligned}$$

et, comme $\sum m V_r V_m\cos(V_r, V_m) = 0$, il s'ensuit que

$$-\sum P_m V_r\,dt\cos(P_m, V_r) = \sum P_r V_m\,dt\cos(P_r V_m).$$

La seule condition nécessaire est que l'on puisse, par des liaisons convenables, détruire un des systèmes de composantes sans altérer l'autre, et que ce dernier réponde à des déplacements virtuels compatibles avec les liaisons existant réellement dans le système.

Par exemple, si on veut appliquer le principe des forces vives à l'étude du mouvement de rotation d'un corps libre, soumis à l'action de certaines forces, par rapport à son centre de gravité considéré comme fixe, le terme de correction pourra être, indifféremment, et au

signe près, ou le travail dû aux forces capables de donner à chaque point, s'il était libre, le mouvement absolu du centre de gravité et aux vitesses de rotation, ou le travail dû aux forces capables de donner à chaque point, s'il était libre, le mouvement de rotation autour du centre de gravité et à la vitesse de translation de ce dernier.

Le théorème qui a été démontré pour le cas où on introduit brusquement certaines liaisons dans un système de points matériels a un analogue pour le cas où on vient, au contraire, à supprimer instantanément certaines liaisons.

Ainsi, en conservant les mêmes notations que précédemment, à propos du théorème correspondant pour les vitesses absolues, on a, en général,

$$\sum m\left[\left(\frac{dx_0}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\right)\delta x+\left(\frac{dy_0}{dt}-\frac{dy_1}{dt}\right)\delta y+\left(\frac{dz_0}{dt}-\frac{dz_1}{dt}\right)\delta z\right]=0.$$

D'ailleurs, d'après ce qui a été dit plus haut, δx, δy, δz sont les projections sur les axes coordonnés d'un déplacement virtuel quelconque, compatible avec les deux systèmes de liaisons (celles qui ont été conservées et celles qui ont été supprimées). On peut donc prendre pour δx, δy, δz, respectivement, $d_r x_0$, $d_r y_0$, $d_r z_0$, en conservant encore les mêmes notations que pour le cas de l'introduction brusque de certaines liaisons. L'équation précédente devient alors

$$\sum m\left[\left(\frac{dx_0}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\right)\frac{d_r x_0}{dt}+\left(\frac{dy_0}{dt}-\frac{dy_1}{dt}\right)\frac{d_r y_0}{dt}+\left(\frac{dz_0}{dt}-\frac{dz_1}{dt}\right)\frac{d_r z_0}{dt}\right]=0$$

ou

$$\sum m\,\mathrm{UV}_{r_0}\cos(\mathrm{U},\mathrm{V}_{r_0})=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sum m\,\mathrm{U}_r\mathrm{V}_{r_0}\cos(\mathrm{U}_r,\mathrm{V}_{r_0})=-\sum m\,\mathrm{U}_m\mathrm{V}_{r_0}\cos(\mathrm{U}_m,\mathrm{V}_{r_0}).$$

On a d'ailleurs

$$\sum m\,\mathrm{V}_{r_1}^2=\sum m\,\mathrm{V}_{r_0}^2+\sum m\,\mathrm{U}_r^2-2\sum m\,\mathrm{U}_r\mathrm{V}_{r_0}\cos(\mathrm{U}_r,\mathrm{V}_{r_0});$$

donc

$$\sum m\,\mathrm{V}_{r_1}^2-\sum m\,\mathrm{V}_{r_0}^2=\sum m\,\mathrm{U}_r^2+2\sum m\,\mathrm{U}_m\mathrm{V}_{r_0}\cos(\mathrm{U}_m,\mathrm{V}_{r_0}).$$

VII.

Nous avons fait voir que, quand il se produit un choc, on a

$$(1)\qquad \sum m U V_{r_1} \cos(U, V_{r_1}) = 0,$$

et aussi

$$(2)\qquad \sum m V_r^2 - \sum m V_{r_1}^2 = \sum m U_r^2 - 2 \sum m U_m V_{r_1} \cos(U_m, V_{r_1}).$$

Ces deux équations supposent que le choc se termine à l'instant où les composantes V_{r_1} sont égales, dans le sens de la normale commune, au point de contact, et que ces composantes V_{r_1} soient compatibles, pour chaque point, avec un déplacement virtuel du système.

Observons de suite que dans ces équations (1) et (2), il entre à la fois les points matériels qui composent les deux corps choquants. Toutefois, il est évident, d'après la manière dont elles ont été obtenues, que, quand les composantes V_{r_1} répondront à des déplacements virtuels tels que, pour ceux-ci, le moment virtuel de l'action mutuelle N des deux corps, suivant la normale, soit nul pour chacun d'eux, ces équations (1) et (2) se dédoubleront chacune en deux autres, dans lesquelles il n'entrera que les termes relatifs à l'un des corps.

VIII.

Nous allons maintenant faire l'application de ce qui précède au problème du choc des corps solides dans les deux cas extrêmes où ceux-ci sont privés d'élasticité, ou, au contraire, parfaitement élastiques.

Nous nous occuperons d'abord du premier cas, et nous supposerons, pour commencer, que les deux corps soient entièrement libres.

Nous regarderons le mouvement de chaque corps comme déterminé à chaque instant par celui de son point de contact et par son mouvement de rotation autour de l'axe instantané qui passe par ce point. Prenons celui-ci pour origine des coordonnées, la normale commune pour axe des z; puis, pour axes des x et des y, deux droites quelconques perpendiculaires entre elles et situées dans le plan tangent commun.

Soient, pour l'un de ces corps, u_0, v_0, w_0 les composantes immédiatement avant le choc de la vitesse de son point de contact, suivant OX, OY et OZ; soient, au même instant, p_0, q_0, r_0 les composantes de son mouvement de rotation autour de OX, OY, OZ. Soient u_1, v_1, w_1; p_1, q_1, r_1 les mêmes quantités aussitôt après le choc. Désignons par les mêmes lettres, avec des accents, ce que sont les quantités correspondantes pour l'autre corps.

Pour appliquer le théorème, nous ferons usage de l'équation

$$(1)\qquad \sum m\mathrm{U}\mathrm{V}_{r_1}\cos(\mathrm{U}, \mathrm{V}_{r_1}) = 0,$$

qui est plus simple que l'équation (2). Nous prendrons pour V_{r_1} successivement u_1, v_1, w_1, puis les vitesses qui répondent aux mouvements séparés de rotation, autour de OZ, de OY et de OX, d'où résulteront six équations; mais celles-ci elles-mêmes en donneront davantage. En effet, dans le déplacement virtuel qui répond à u_1, le moment virtuel de N est nul, d'où résulte que l'équation (1) a lieu séparément pour chaque corps; et, comme V_{r_1} est alors facteur commun, il faudra poser, pour chaque corps,

$$\sum m\mathrm{U}\cos(\mathrm{U}, \mathrm{V}_{r_1}) = 0.$$

La même chose peut se dire relativement à v_1. On aura donc quatre équations.

Par rapport à w_1, l'équation (1) ne se dédouble pas, attendu que, pour chaque corps séparément, le moment virtuel correspondant de N n'est pas nul. Mais on a de suite une équation de plus, qui est $w_1 = w'_1$.

Il est clair d'ailleurs que l'équation (1) se dédouble quand V_{r_1} se rapporte aux vitesses de rotation autour de l'un quelconque des trois axes. D'abord, dans le mouvement de rotation autour de OZ, le point d'application de N reste fixe; par conséquent, son moment virtuel est nul. Quand un des corps tourne autour de OX ou de OY, sans glissement, le moment virtuel de N, quoiqu'il ne soit pas rigoureusement nul, est un infiniment petit du second ordre et négligeable. Au reste, on voit aisément que le théorème s'applique à toutes ces composantes V_{r_1}; car toutes répondent à des déplacements virtuels compatibles avec

les liaisons du système, et pour chacune séparément, les vitesses finales des éléments de contact sont les mêmes dans le sens de la normale commune.

On voit donc ainsi que l'on aura douze équations pour déterminer les douze inconnues $u_1, v_1, w_1; p_1, q_1, r_1; u'_1, v'_1, w'_1; p'_1, q'_1, r'_1$. Il s'agit maintenant de les former.

Or, pour un point matériel du premier corps, d'une masse dm et dont les coordonnées sont x, y, z, les composantes parallèles à OX, à OY et à OZ de la quantité de mouvement perdue sont respectivement

$$[u_0 - u_1 + (q_0 - q_1)z - (r_0 - r_1)y]\,dm,$$
$$[v_0 - v_1 + (r_0 - r_1)x - (p_0 - p_1)z]\,dm,$$
$$[w_0 - w_1 + (p_0 - p_1)y - (q_0 - q_1)x]\,dm.$$

A l'aide de ces composantes, il sera facile de former les équations qui se rapportent aux composantes dans le sens de u_1, de v_1 et de w_1. Quant aux équations qui sont relatives aux mouvements de rotation autour des axes coordonnés, elles ne seront pas difficiles à obtenir. Prenons pour exemple le mouvement de rotation autour de OZ. Désignons, pour un instant, par X, Y, Z les composantes de la quantité de mouvement perdue par dm, parallèlement aux trois axes. Si ρ est la distance du point (x, y, z) à l'axe OZ, on aura pour ce point,

$$m\,\mathrm{U}\,\mathrm{V}_{r_1}\cos(\mathrm{U}, \mathrm{V}_{r_1})$$
$$= r_1\,dm\,[\mathrm{Z}\rho\cos(\mathrm{Z}, \rho r_1) + \mathrm{Y}\rho\cos(\mathrm{Y}, \rho r_1) + \mathrm{X}\rho\cos(\mathrm{X}, \rho r_1)].$$

Or

$$\cos(\mathrm{Z}, \rho r_1) = 0;$$

puis on a

$$\rho\cos(\mathrm{Y}, \rho r_1) = \pm x \quad \text{et} \quad \rho\cos(\mathrm{X}, \rho r_1) = \mp y.$$

Donc

$$\int m\,\mathrm{U}\,\mathrm{V}_{r_1}\cos(\mathrm{U}, \mathrm{V}_{r_1}) = \pm r_1\int dm\,(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y) = 0,$$

ou

$$\int dm\,(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y) = 0,$$

lors même qu'on aurait $r_1 = 0$; car r_1 est entré dans l'équation prim-

tive comme représentant un déplacement virtuel, et ce déplacement peut toujours être pris différent de o, lors même qu'on aurait $r_1 = 0$.

Ces préliminaires établis, il est facile d'obtenir les douze équations cherchées.

On aura

$$(1)\qquad \int [u_0 - u_1 + (q_0 - q_1) z - (r_0 - r_1) y]\, dm = 0.$$

$$(2)\qquad \int [v_0 - v_1 + (r_0 - r_1) x - (p_0 - p_1) z]\, dm = 0.$$

$$(3)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \int [w_0 - w_1 + (p_0 - p_1) y - (q_0 - q_1) x]\, dm \\ + \int [w'_0 - w'_1 + (p'_0 - p'_1) y' - (q'_0 - q'_1) x']\, dm \end{array} \right\} = 0,$$

$$(4)\qquad w_1 = w'_1,$$

$$(5)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \int [v_0 - v_1 + (r_0 - r_1) x - (p_0 - p_1) z]\, x\, dm \\ - \int [u_0 - u_1 + (q_0 - q_1) z - (r_0 - r_1) y]\, y\, dm \end{array} \right\} = 0,$$

$$(6)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \int [u_0 - u_1 + (q_0 - q_1) z - (r_0 - r_1) y]\, z\, dm \\ - \int [w_0 - w_1 + (p_0 - p_1) y - (q_0 - q_1) x]\, x\, dm \end{array} \right\} = 0,$$

$$(7)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \int [w_0 - w_1 + (p_0 - p_1) y - (q_0 - q_1) x]\, y\, dm \\ - \int [v_0 - v_1 + (r_0 - r_1) x - (p_0 - p_1) z]\, z\, dm \end{array} \right\} = 0$$

Les cinq autres équations se déduisent des équations (1), (2), (5), (6), (7), en mettant des accents aux lettres qui y entrent.

Soient M et M′ les masses totales des deux corps; soient x_1, y_1, z_1; x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées de leurs centres de gravité. Désignons enfin par A, B, C; A′, B′, C′ leurs moments d'inertie, par rapport à OX, OY et OZ. Les équations précédentes deviendront

$$(1)\qquad u_0 - u_1 + z_1 (q_0 - q_1) - y_1 (r_0 - r_1) = 0.$$

$$(2)\qquad v_0 - v_1 + x_1 (r_0 - r_1) - z_1 (p_0 - p_1) = 0.$$

$$(3)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{M}\,(w_0 - w_1) + \mathrm{M} y_1 (p_0 - p_1) - \mathrm{M} x_1 (q_0 - q_1) \\ + \mathrm{M}'\,(w'_0 - w'_1) + \mathrm{M}' y'_1 (p'_0 - p'_1) - \mathrm{M}' x'_1 (q'_0 - q'_1) \end{array} \right\} = 0$$

$$(4)\qquad w_1 = w'_1,$$

$$(5)\qquad \begin{cases} Mx_1(v_0 - v_1) - My_1(u_0 - u_1) + C(r_0 - r_1) - (p_0 - p_1) \\ \qquad \int xzdm - (q_0 - q_1)\int yzdm = 0, \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} Mz_1(u_0 - u_1) - Mx_1(w_0 - w_1) + B(q_0 - q_1) - (r_0 - r_1) \\ \qquad \int yzdm - (p_0 - p_1)\int yxdm = 0, \end{cases}$$

$$(7)\qquad \begin{cases} My_1(w_0 - w_1) - Mz_1(v_0 - v_1) + A(p_0 - p_1) - (q_0 - q_1) \\ \qquad \int xydm - (r_0 - r_1)\int xzdm = 0, \end{cases}$$

$$(8)\qquad u'_0 - u_1 + z'_1(q'_0 - q'_1) - y'_1(r'_0 - r'_1) = 0,$$

$$(9)\qquad v'_0 - v'_1 + x'_1(r'_0 - r'_1) - z'_1(p'_0 - p'_1) = 0,$$

$$(10)\qquad \begin{cases} M'x'_1(v'_0 - v'_1) - M'y'_1(u'_0 - u'_1) + C'(r'_0 - r'_1) - (p'_0 - p'_1) \\ \qquad \int x'z'dm' - (q'_0 - q'_1)\int y'z'dm' = 0, \end{cases}$$

$$(11)\qquad \begin{cases} M'z'_1(u_0 - u_1) - M'x'_1(w'_0 - w'_1) + B'(q'_0 - q'_1) - (r'_0 - r_1) \\ \qquad \int y'z'dm' - (p'_0 - p'_1)\int y'x'dm' = 0, \end{cases}$$

$$(12)\qquad \begin{cases} M'y'_1(w_0 - w'_1) - M'z'_1(v'_0 - v'_1) + A'(p'_0 - p'_1) - (q'_0 - q'_1) \\ \qquad \int x'y'dm' - (r'_0 - r'_1)\int x'z'dm' = 0 \end{cases}$$

Telles sont les douze équations du premier degré qui déterminent les douze inconnues. On voit que, si les axes coordonnés sont les axes principaux de l'un des corps, les intégrales $\int xydm$, $\int xzdm$, $\int yzdm$ disparaissent pour celui-ci, et elles seraient nulles pour les deux, si ceux-ci avaient tous deux les axes coordonnés pour axes principaux du point de contact. Après avoir résolu ces équations, on aura facilement la vitesse d'un point quelconque de l'un des corps, immédiatement après le choc; car, si x, y, z sont les coordonnées de ce point, les composantes de sa vitesse parallèlement à OX, OY et OZ sont

$$u_1 + zq_1 - yr_1,$$
$$v_1 + xr_1 - zp_1,$$
$$w_1 + yp_1 - xq_1.$$

Si on voulait appliquer la théorie précédente au problème du choc des corps, dans le cas de leur parfaite élasticité, il faudrait le décomposer en deux périodes : l'une, depuis le commencement jusqu'à l'instant de la plus grande compression et qui se traiterait comme ci-dessus; l'autre, depuis ce moment jusqu'à la fin, et que l'on regarderait comme un second choc. Dans cette seconde période, on aurait encore douze inconnues et une équation de moins; car, pour la fin du choc, on n'aurait plus $w_1 = w'_1$, mais on aurait à la place une autre équation servant à exprimer que la quantité de mouvement perdue par l'un des corps dans le sens de la normale est la même dans la seconde période que dans la première; ce qui n'aurait plus lieu si les corps n'étaient qu'imparfaitement élastiques.

IX.

L'équation

$$\sum m V_{r_0}^2 - \sum m V_{r_1}^2 = \sum m U_r^2 - 2 \sum m U_m V_{r_1} \cos(U_m, V_{r_1})$$

peut être appliquée à l'étude des machines hydrauliques, à l'occasion desquelles on a souvent lieu de faire usage du principe des forces vives dans les mouvements relatifs. Elle permettra, quand il y aura choc ou changement brusque dans les liaisons établies, de connaître les nouvelles vitesses relatives, sans être obligé de passer par l'intermédiaire des vitesses absolues, ainsi que la modification qui en résulte dans l'expression du travail de la machine. Sans doute, la manière même dont se comportent les fluides quand ils sont placés dans des circonstances où des corps solides éprouveraient des changements instantanés de vitesse, fait qu'ils ne les éprouvent pas de même, et que toute méthode de calcul qui repose sur cette assimilation ne peut donner que des résultats approximatifs; mais cette cause d'inexactitude tient à la nature du fluide lui-même, et toute méthode doit nécessairement s'en ressentir dans l'application, car il est impossible de faire entrer dans les formules cette manière d'être des fluides, que nous allons développer en quelques lignes. Quand un fluide change brusquement de direction, il y a perte de force vive; la vitesse perdue est la composante normale à cette direction finale, et la vitesse conservée est la

projection de la vitesse initiale sur cette même direction. C'est ce qui se voit immédiatement, et cela se conclut aussi du théorème des forces vives sur les chocs ou sur les changements brusques de liaisons. Ce fait se vérifie toujours et le théoreme en question s'applique de même. Seulement, quand le changement de direction ne se fait pas instantanément à angle vif, mais par une courbe ou un coude arrondi, la vitesse finale, au lieu d'être la projection de la vitesse initiale sur la direction du fluide à la sortie, est égale à cette vitesse initiale. C'est ce qui résulte toujours, au reste, des mêmes principes; car, à chaque instant, la diminution de vitesse, c'est-à-dire la vitesse diminuée de ce qu'elle devient au bout d'un temps infiniment petit, est égale à cette vitesse multipliée par le sinus-verse de l'angle de contingence en ce point de la courbe que le fluide est obligé de parcourir. Cette diminution est donc un infiniment petit du second ordre, et la diminution totale, c'est-à-dire la vitesse initiale moins la vitesse finale est toujours un infiniment petit; par conséquent, la vitesse finale est égale à la vitesse initiale. Or, quand un fluide vient rencontrer un obstacle qui le force à changer de direction, les parties qui rencontrent directement cet obstacle doivent bien changer brusquement de direction; mais celles qui sont à une certaine distance changent de direction d'une manière graduelle, ce qui diminue la perte totale de force vive dans une proportion qu'il paraît impossible d'évaluer rigoureusement.

SUR LA ROTATION D'UN CORPS,

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

PAR M. C.-G.-J. JACOBI.

[*Comptes rendus*, tome XXIX, page 97. — Séance du 30 juillet 1849.]

Le probleme de la rotation d'un corps solide quelconque, qui n'est sollicité par aucune force accélératrice, est susceptible d'être résolu par des formules nouvelles si élégantes et si parfaites, que je ne peux m'empêcher de les communiquer à votre illustre Académie. Ce sont les fonctions Θ et H que j'ai introduites dans l'analyse des fonctions elliptiques, c'est-à-dire les fonctions

$$\Theta = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots,$$

$$\mathrm{H} = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - 2\sqrt[4]{q^{49}}\sin 7x + \ldots.$$

au moyen desquelles je suis parvenu à exprimer, de la manière la plus simple, les neuf cosinus eux-mêmes qu'il s'agit, dans ce problème, de déterminer en fonctions du temps. En effet, x étant une variable proportionnelle au temps, on trouve les cosinus des angles qui, à chaque instant, déterminent la position des axes principaux du corps, égaux à des fractions qui ont cette fonction Θ pour commun dénominateur, les neuf numérateurs étant, abstraction faite de facteurs constants, la même fonction Θ, où seulement x se trouve augmenté d'une constante imaginaire. Quel que soit le degré d'exactitude auquel on voudra pousser les calculs, on n'aura guere a prendre plus de quatre termes de ces séries, excepté les cas extrêmes. On doit donc regarder ces cosinus comme exprimés par des quantités finies, et même par des quantités finies très-simples. Si l'on veut résoudre le problème du mouvement elliptique d'une planete par de semblables formules définitives qui ont le temps sous le signe cos ou sin, on a,

comme on sait, des séries beaucoup moins convergentes, et des coefficients beaucoup plus compliqués.

La rotation en question se compose de *deux rotations périodiques*, et dont les périodes, en général, sont incommensurables entre elles. Pour avoir une idée nette et claire de ce mouvement, il faut supposer aux axes des x et y, dans le plan invariable, un certain mouvement rotatoire uniforme, et rapporter la position du corps à ces axes mobiles et à l'axe fixe des z perpendiculaire au plan invariable. Or, étant posé

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' + \gamma z', \\ y &= \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z', \\ z &= \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z', \end{aligned}$$

les axes des x', y', z' étant les axes principaux du corps, et les axes des x et y, comme on vient de dire, des axes mobiles tournoyant uniformément, avec une vitesse déterminée, dans le plan invariable, les neuf quantités α, β, etc., seront des fonctions du temps *simplement périodiques*. Avant de donner leurs valeurs en fonctions du temps, il faut convenir des notations suivantes :

Soient, h la force vive, l le moment de rotation dans le plan invariable, A, B, C les trois moments d'inertie relatifs aux axes des x', y', z', et supposons, pour fixer les idées, que

$$Bh > l^2,$$

où B est le moment moyen, A étant le plus grand, C le plus petit. Le module des transcendantes elliptiques qui entreront dans les formules données ci-dessous, sera

$$k = \sqrt{\frac{A-B}{B-C}} \cdot \sqrt{\frac{l^2 - Ch}{Ah - l^2}},$$

d'où

$$k' = \sqrt{1-k^2} = \sqrt{\frac{A-C}{B-C}} \cdot \sqrt{\frac{Bh - l^2}{Ah - l^2}}.$$

Posons, comme dans mon ouvrage sur les fonctions elliptiques,

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}}, \quad q = e^{-\frac{\pi K}{K'}};$$

soit de plus $K - a$ une intégrale elliptique de première espèce, dont le sinus de l'amplitude, par rapport au module complémentaire k', est

$$\sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}} = \sin \operatorname{am}(K - a, k'),$$

ou, étant mis

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}},$$

soit

$$a = \int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta}}.$$

Soit t le temps, et

$$u = nt + \tau,$$

τ étant une nouvelle constante arbitraire, et

$$n = \sqrt{\frac{(B-C)(Ah - l^2)}{ABC}}.$$

Aux fonctions Θu et Hu dont j'ai fait usage dans les *Fundamenta*, je joins les fonctions

$$\Theta_1(u) = \Theta(K - u), \quad H_1(u) = H(K - u);$$

de sorte qu'on a

$$\sqrt{k} \sin \operatorname{am} u = \frac{Hu}{\Theta u}, \quad \sqrt{\frac{k}{k'}} \cos \operatorname{am} u = \frac{H_1(u)}{\Theta u}, \quad \frac{1}{\sqrt{k'}} \Delta \operatorname{am} u = \frac{\Theta_1(u)}{\Theta u}.$$

Cela posé, et étant $i = \sqrt{-1}$, *on aura le tableau suivant des valeurs des neuf quantités* α, β, *etc.*.

$$\alpha = \frac{\Theta_1(0)[H(u+ia) + H(u-ia)]}{2H_1(ia)\Theta u}, \qquad \alpha' = \frac{\Theta_1(0)[H(u+ia) - H(u-ia)]}{2iH_1(ia)\Theta u},$$

$$\beta = -\frac{\Theta(0)[H_1(u-ia) + H_1(u+ia)]}{2H_1(ia)\Theta u}, \qquad \beta' = \frac{\Theta(0)[H_1(u-ia) - H_1(u+ia)]}{2iH_1(ia)\Theta u},$$

$$\gamma = \frac{H\left(\frac{\pi}{2}\right)[\Theta(u+ia) - \Theta(u-ia)]}{2iH_1(ia)\Theta u}, \qquad \gamma' = -\frac{H\left(\frac{\pi}{2}\right)[\Theta(u+ia) + \Theta(u-ia)]}{2H_1(ia)\Theta u},$$

$$\alpha'' = \frac{\Theta(ia)H_1 u}{H_1(ia)\Theta u}, \quad \beta'' = \frac{\Theta_1(ia)Hu}{H(ia)\Theta u}, \quad \gamma'' = \frac{H(ia)\Theta(u)}{iH_1(ia)\Theta u}.$$

Les composantes de la vitesse rotatoire instantanée parallèles aux x, y, z sont :

$$f\cdot\frac{\mathrm{H}\left(\frac{\pi}{2}\right)[\Theta_1(u-ia)+\Theta_1(u+ia)]}{2\mathrm{H}_1(ia)\Theta u},\quad f\cdot\frac{\mathrm{H}\left(\frac{\pi}{2}\right)[\Theta_1(u-ia)-\Theta_1(u+ia)]}{2i\mathrm{H}_1(ia)\Theta u},\quad \frac{h}{g},$$

ou

$$f=\frac{\sqrt{[(\mathrm{B}-\mathrm{C})(\mathrm{B}h-l^2)]}}{\mathrm{B}\sqrt{\mathrm{C}}}.$$

Le mouvement rotatoire du plan invariable est

$$n'u=n'(nt+\tau),$$

où la constante n' est

$$n'=\frac{1}{\mathrm{A}-\mathrm{C}}\left[\mathrm{C}\frac{d\log\mathrm{H}(ia)}{da}+\mathrm{A}\frac{d\log\Theta(ia)}{da}\right].$$

Mettant

$$x=\frac{\pi u}{2\mathrm{K}}=\frac{\pi(nt+\tau)}{2\mathrm{K}},\quad a=b\mathrm{K},$$

où $b<1$, on aura

$$\frac{1}{2}[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)]=1-q^{1-b}(1+q^{2b})\cos 2x+q^{4-2b}(1+q^{4b})\cos 4x-\ldots,$$

$$\frac{1}{2i}[\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)]=q^{1-b}(1-q^{2b})\sin 2x-q^{4-2b}(1-q^{4b})\sin 4x+\ldots,$$

$$\frac{1}{2}[\mathrm{H}(u+ia)+\mathrm{H}(u-ia)]=q^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}b}[(1+q^b)\sin x-q^{2-b}(1+q^{3b})\sin 3x+\ldots],$$

$$\frac{1}{2i}[\mathrm{H}(u+ia)-\mathrm{H}(u-ia)]=q^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}b}[(1-q^b)\cos x-q^{2-b}(1-q^{3b})\cos 3x+\ldots],$$

$$\frac{1}{2}[\mathrm{H}_1(u-ia)+\mathrm{H}_1(u+ia)]=q^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}b}[(1+q^b)\cos x+q^{2-b}(1+q^{3b})\cos 3x+\ldots],$$

$$\frac{1}{2i}[\mathrm{H}_1(u-ia)+\mathrm{H}_1(u+ia)]=q^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}b}[(1-q^b)\sin x+q^{2-b}(1-q^{3b})\sin 3x+\ldots].$$

$$\frac{1}{2}[\Theta(u-ia)+\Theta(u+ia)]=1+q^{1-b}(1+q^{2b})\cos 2x+q^{4-2b}(1+q^{4b})\cos 4x+\ldots,$$

$$\frac{1}{2i}[\Theta(u-ia)-\Theta(u+ia)]=q^{1-b}(1-q^{2b})\sin 2x+q^{4-2b}(1-q^{4b})\cos 4x+\ldots$$

Dans les deux premieres et les deux dernieres formules, les premiers termes qui suivent ceux qu'on a écrits, sont de l'ordre de la quantité q^{9-3b}; dans les autres formules, ces termes sont de l'ordre de la quantité q^{6-2b}: ceux-ci ajoutés, on n'aura rejeté que les termes respectivement de l'ordre des quantités q^{16-4b} et q^{12-3b}. En mettant ou $b = 0$ ou $x = 0$, on aura le développement des autres fonctions qui entrent dans les formules établies ci-dessus. On a, d'ailleurs

$$\Theta_1(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}, \quad \Theta(0) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}, \quad H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}$$

Si la quantité q et le module k sont tres-proches de l'unité, on se servira des formules suivantes, par lesquelles le module se transforme dans son complément, et, par suite, la quantité q dans la quantité extremement petite $q' = e^{\frac{\pi}{\log q}}$,

$$\begin{aligned}
\Theta(u + ia) &= igH[u - i(K' - a)] = g'H_1(a - iu, k') \\
&= g''\Theta_1[a + i(K - u), k'], \\
H(u + ia) &= ig\Theta[u - i(K' - a)] = ig'H(a - iu, k') \\
&= g''\Theta[a + i(K - u), k'], \\
H_1(u + ia) &= g\Theta_1[u - i(K' - a)] = g'\Theta(a - iu, k') \\
&= -ig''H[a + i(K - u), k'], \\
\Theta_1(u + ia) &= gH_1[u - i(K' - a)] = g'\Theta_1(a - iu, k') \\
&= g''H_1[a - i(K - u), k'],
\end{aligned}$$

ou

$$g = e^{-\frac{\pi}{4K}(K - 2a + 2iu)},$$

$$g' = \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{-\frac{\pi}{4KK'}(u + ia)},$$

$$g'' = \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{-\frac{\pi}{4KK'}(K - u - ia)}.$$

Par cette transformation, les formules perdent leur caractere périodique, comme cela est bien propre à un mouvement de rotation extremement lent et dont la période est d'une durée quasi-infinie.

On peut aussi développer les neuf cosinus α, β, etc., en séries périodiques très-simples et assez convergentes encore, quoique dépourvues de cette convergence extraordinaire dont jouissent le dénominateur et les numérateurs de leurs valeurs fractionnaires données ci-dessus. On parvient à ces développements en partant de ces fractions et en se servant des formules suivantes :

$$(1)\qquad \mathrm{H}_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{i\left[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)\right]}{2\,\mathrm{H}(ia)\,\Theta u}$$

$$=\frac{2\,q^{\frac{1}{2}b}}{1-q^b}-2\left(q^{-\frac{1}{2}b}-q^{\frac{1}{2}b}\right)\left[\frac{q(1+q^2)\cos 2x}{(1-q^{2-b})(1-q^{2+b})}+\frac{q^2(1+q^4)\cos 4x}{(1-q^{4-b})(1-q^{4+b})}+\cdots\right];$$

$$(2)\qquad \mathrm{H}_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)}{2\,\mathrm{H}(ia)\,\Theta u}$$

$$=2\left(q^{-\frac{1}{2}b}+q^{\frac{1}{2}b}\right)\left[\frac{q(1-q^2)\sin 2x}{(1-q^{2-b})(1-q^{2+b})}+\frac{q^2(1-q^4)\sin 4x}{(1-q^{4-b})(1-q^{4+b})}+\cdots\right].$$

$$(3)\qquad \mathrm{H}_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\mathrm{H}(u+ia)+\mathrm{H}(u-ia)}{2\,\Theta(ia)\,\Theta u}$$

$$=2\left(q^{-\frac{1}{2}b}+q^{\frac{1}{2}b}\right)\left[\frac{\sqrt{q(1-q)}\sin x}{(1-q^{1-b})(1-q^{1+b})}+\frac{\sqrt{q^3(1-q^3)}\sin 3x}{(1-q^{3-b})(1-q^{3+b})}+\cdots\right];$$

$$(4)\qquad \mathrm{H}_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\mathrm{H}(u+ia)-\mathrm{H}(u-ia)}{2\,i\,\Theta(ia)\,\Theta u}$$

$$=2\left(q^{-\frac{1}{2}b}-q^{\frac{1}{2}b}\right)\left[\frac{\sqrt{q(1+q)}\cos x}{(1-q^{1-b})(1-q^{1+b})}+\frac{\sqrt{q^3(1+q^3)}\cos 3x}{(1-q^{3-b})(1-q^{3+b})}+\cdots\right];$$

$$(5)\qquad \mathrm{H}_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\mathrm{H}_1(u-ia)+\mathrm{H}_1(u+ia)}{2\,\Theta_1(ia)\,\Theta u}$$

$$=2\left(q^{-\frac{1}{2}b}+q^{\frac{1}{2}b}\right)\left[\frac{\sqrt{q(1+q)}\cos x}{(1+q^{1-b})(1+q^{1+b})}+\frac{\sqrt{q^3(1+q^3)}\cos 3x}{(1+q^{3-b})(1+q^{3+b})}+\cdots\right];$$

$$(6)\qquad \mathrm{H}_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\mathrm{H}_1(u-ia)-\mathrm{H}_1(u+ia)}{2\,i\,\Theta_1(ia)\,\Theta u}$$

$$=2\left(q^{-\frac{1}{2}b}-q^{\frac{1}{2}b}\right)\left[\frac{\sqrt{q(1-q)}\sin x}{(1-q^{1-b})(1+q^{1+b})}+\frac{\sqrt{q^3(1+q^3)}\sin 3x}{(1+q^{3-b})(1+q^{3+b})}+\cdots\right];$$

$$(7)\qquad \mathrm{H}_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\Theta_1(u-ia)+\Theta_1(u+ia)}{2\,\mathrm{H}_1(ia)\,\Theta u}$$

$$=\frac{2q^{\frac{1}{2}b}}{1+q^b}+2\left(q^{-\frac{1}{2}b}+q^{\frac{1}{2}b}\right)\left[\frac{q(1+q^2)\cos 2x}{(1+q^{2-b})(1+q^{2+b})}+\frac{q^4(1+q^4)\cos 4x}{(1+q^{4-b})(1+q^{4+b})}+\cdots\right].$$

$$(8)\qquad \mathrm{H}_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\Theta_1(u-ia)-\Theta_1(u+ia)}{2i\,\mathrm{H}_1(ia)\,\Theta u}$$

$$=2\left(q^{-\frac{1}{2}b}-q^{\frac{1}{2}b}\right)\left[\frac{q(1-q^2)\sin 2x}{(1+q^{2-b})(1+q^{2+b})}+\frac{q^2(1-q^4)\sin 4x}{(1+q^{4-b})(1+q^{4+b})}+\cdots\right].$$

$$(9)\qquad \mathrm{H}_1(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\mathrm{H}_1(u)}{\Theta u}=\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}\cos\mathrm{am}\,u=\frac{4\sqrt{q}\cos x}{1+q}+\frac{4\sqrt{q^3}\cos 3x}{1+q^3}+\cdots$$

$$(10)\qquad \mathrm{H}_1(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\mathrm{H}u}{\Theta u}=\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}\sin\mathrm{am}\,u=\frac{4\sqrt{q}\sin x}{1-q}+\frac{4\sqrt{q^3}\sin 3x}{1-q^3}+\cdots$$

$$(11)\qquad \Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\Theta_1(u)}{\Theta u}=\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\Delta\,\mathrm{am}\,u=1+\frac{4q\cos 2x}{1+q}+\frac{4q^4\cos 4x}{1+q^4}+\cdots$$

Quant aux facteurs constants par lesquels il faut multiplier les formules précédentes pour obtenir les valeurs des neufs cosinus, j'observe qu'on a

$$\frac{\Theta(ia)}{\mathrm{H}_1(ia)}=\sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{1}{\cos\mathrm{am}(ia)}=\sqrt{\frac{k'}{k}}\sqrt{\frac{\mathrm{A}(l^2-\mathrm{C}h)}{(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,l^2}},$$

$$\frac{\Theta_1(ia)}{\mathrm{H}_1(ia)}=\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\Delta\,\mathrm{am}(ia)}{\cos\mathrm{am}(ia)}=\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{\mathrm{B}(l^2-\mathrm{C}h)}{(\mathrm{B}-\mathrm{C})\,l^2}},$$

$$\frac{\mathrm{H}(ia)}{i\,\mathrm{H}_1(ia)}=\frac{\sqrt{k'}\,\mathrm{tang\,am}(ia)}{i}=\sqrt{k'}\sqrt{\frac{\mathrm{C}(\mathrm{A}h-l^2)}{(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,l^2}}.$$

Les formules (1) et (8) sont nouvelles et d'une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques; j'ai remarqué ailleurs que, par leur moyen, on parvient, de la manière la plus aisée et la plus directe, aux formules de la transformation inverse, vu qu'en faisant usage d'autres méthodes, on a quelque peine à déterminer les facteurs constants qui entrent dans ces formules.

On trouvera des séries analogues pour les valeurs des six quantités

$$\frac{\alpha}{\alpha''},\quad \frac{\alpha'}{\alpha''},\quad \frac{\beta}{\beta''},\quad \frac{\beta'}{\beta''},\quad \frac{\gamma}{\gamma''},\quad \frac{\gamma'}{\gamma''},$$

ou pour les tangentes des angles que les projections des axes des x', y', z' sur les plans des x, z et des y, z forment avec l'axe des z.

Mais, pour les recherches analytiques, il conviendra presque toujours de faire usage des formules fractionnaires par lesquelles on a exprimé les cosinus des angles des deux systemes de coordonnees. Ces formules remarquables pourront, dans le probleme de la rotation, servir de point de départ à des recherches analogues a celles que M. Gauss a entreprises dans son *Traité sur le mouvement elliptique et hyperbolique.*

Les mêmes formules donnent une nouvelle maniere d'exprimer les neuf cosinus des angles de deux systèmes d'axes rectangulaires par trois quantités. Ces quantités sont ici les deux arguments u et a, et le module k; ou, si l'on veut, les quantités x, b, q.

THÈSE DE MÉCANIQUE.

Sur la propagation du son dans un milieu indéfini homogène dans l'état d'équilibre;

PAR M. TH. DIEU.
Professeur de Mathématiques supérieures au Lycée de Dijon

J'ai pour but d'exposer la théorie mathématique des mouvements vibratoires par lesquels le son se propage dans un gaz homogène indéfini.

Poisson en a tracé l'histoire, avec la supériorité de vues qui le distinguait, dans le premier des Mémoires où il l'a traitée (XIVe cahier de l'*École Polytechnique*). Cependant, je me propose de rappeler, dans un résumé rapide, la part des savants illustres qui ont ouvert la voie, et d'indiquer les perfectionnements dus à Poisson. Il est revenu, comme l'on sait, à diverses époques, sur cette importante théorie, et n'a pas moins amélioré ses premières idées et ses premières méthodes de calcul que celles de ses devanciers.

§ Ier.

Équations du problème. — Calcul de l'intégrale de l'équation unique à laquelle on les ramène.

1. Les équations générales du mouvement d'un fluide sont au

nombre de quatre,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho\left(X - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx} - v\frac{du}{dy} - w\frac{du}{dz}\right) = \frac{dp}{dx},\\ &\rho\left(Y - \frac{dv}{dt} - u\frac{dv}{dx} - v\frac{dv}{dy} - w\frac{dv}{dz}\right) = \frac{dp}{dx},\\ &\rho\left(Z - \frac{dw}{dt} - u\frac{dw}{dx} - v\frac{dw}{dy} - w\frac{dw}{dz}\right) = \frac{dp}{dz}.\\ &\frac{d\rho}{dt} + \frac{d.\rho u}{dx} + \frac{d.\rho v}{dy} + \frac{d.\rho w}{dz} = 0; \end{aligned}\right\}\ [*],$$

dont les trois premières s'obtiennent en mettant les forces perdues dans les équations générales d'équilibre, et la dernière par la condition que le fluide reste continu pendant le mouvement. On doit y joindre

$$(2)\qquad \frac{dx}{dt} = u,\quad \frac{dy}{dt} = v,\quad \frac{dz}{dt} = w.$$

Les équations (1) contiennent cinq inconnues, u, v, w, p et ρ; donc, elles ne suffisent pas pour les déterminer. Mais on peut obtenir une relation particulière, c'est-à-dire différente pour chaque nature de fluide, entre la pression p et la densité ρ, lorsque la densité n'est pas supposée constante. Si elle l'était, cela réduirait à quatre le nombre des inconnues, et les équations (1), dont la dernière deviendrait

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

seraient suffisantes.

2. Lorsqu'on admet qu'il n'y pas sensiblement de calorique perdu ou gagné par une portion quelconque d'un gaz, pendant la durée des mouvements vibratoires par lesquels le son se propage dans ce gaz que nous supposons homogène dans l'état d'équilibre; qu'on représente par p_0 la pression et ρ_0 la densité de cet état, par c et c' les capacités calorifiques à pression constante et à volume constant [**],

[*] Toutes les lettres qui entrent dans ces équations ont les significations qu'on leur donne ordinairement dans l'hydrodynamique.

[**] $\frac{c}{c'} = 1,3748$, d'après les expériences de MM. Gay-Lussac et Welter.

et qu'on pose

$$\rho = \rho_0(1 - \sigma), \tag{3}$$

de sorte que $-\rho_0\sigma$ soit la variation que la densité éprouve quand le gaz passe de la pression p_0 à la pression p; la relation dont je viens de parler est

$$p = p_0\left(1 - \frac{c}{c'}\sigma\right) [*]. \tag{4}$$

5. Afin de pouvoir rigoureusement considérer le gaz comme homogène dans l'état d'équilibre, il faut faire abstraction des forces extérieures. Ainsi, par exemple, dans le cas de la propagation dans l'air, il ne faut pas avoir égard à la pesanteur, et, en outre, il est nécessaire de supposer la température uniforme : cela réduit, sans doute, le problème à une pure abstraction; mais, avec un peu de réflexion, on voit que les circonstances écartées ne sauraient avoir une grande influence, et l'expérience a même démontré que cette influence est à peu près nulle sur la vitesse de propagation du son.

Si l'on néglige donc les forces X, Y, Z, et les produits deux à deux des quantités u, v, w, σ, et des dérivées partielles des trois premières, toutes ces quantités pouvant être considérées comme très-petites dans le mouvement dont il s'agit, on obtient, par les équations (1), (3) et (4),

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{du}{dt} = a^2\frac{d\sigma}{dx}, \quad \frac{dv}{dt} = a^2\frac{d\sigma}{dy}, \quad \frac{dw}{dt} = a^2\frac{d\sigma}{dz}, \\ &\frac{d\sigma}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

---

[*] On l'obtient, par un calcul élémentaire, en concevant que le gaz passe du premier état au second :

1°. Par une variation de température au moyen de laquelle la pression deviendrait p, sans que le volume ni la densité changent,

2°. Par une seconde variation de température qui conduise à celle du second état, sans changement dans la pression p.

On néglige d'ailleurs les quantités très-petites par rapport à σ, comme, par exemple, les puissances σ^2, etc.

en remplaçant $\frac{p_0}{\rho_0}\frac{c}{c'}$ par a^2, et ce système fera connaître u, v, w et σ; les équations (3) et (4) donneront ensuite p et ρ. Quant aux coordonnées d'une molécule, qui seraient x_0, y_0, z_0 pour $t = 0$, on en obtiendrait les valeurs à la fin du temps t par l'intégration des équations (2).

4. On voit facilement que les trois premières équations (5) pourraient immédiatement être intégrées par rapport à t, si σ était la dérivée, relative à cette variable, d'une certaine fonction de x, y, z, t. Or on peut admettre, sans restreindre la question, qu'il en est ainsi, et poser

$$\sigma = \frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}; \tag{6}$$

φ étant telle, que $-\frac{\varphi_0}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}$ devienne pour $t = 0$ la condensation qui aura été initialement produite en un point quelconque.

La substitution de cette expression au lieu de σ, dans la première équation (5), suivie de l'intégration relative à t, fournit

$$u = \frac{d\varphi}{dx} + \mathrm{U}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy} + \mathrm{V}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz} + \mathrm{W}, \tag{7}$$

en désignant par U, V, W trois fonctions arbitraires de x, y, z seulement; et la dernière équation (5) devient

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) + \Psi(x, y, z), \tag{8}$$

en posant

$$a^2\left(\frac{d\mathrm{U}}{dx} + \frac{d\mathrm{V}}{dy} + \frac{d\mathrm{W}}{dz}\right) = \Psi(x, y, z). \tag{9}$$

La solution du problème se trouve ainsi ramenée au calcul de l'intégrale complète d'une équation à dérivées partielles; et je vais maintenant exposer un des procédés qu'on peut employer pour parvenir à cette intégrale.

5. Si l'on connaissait une intégrale particulière $\varphi = \varphi'$ de l'équation (8), et l'intégrale générale $\varphi = \varphi_1$ de l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right), \tag{9}$$

on en déduirait $\varphi = \varphi' + \varphi_1$, qui serait l'intégrale complète de (8), car cette valeur de φ la vérifierait évidemment, et contiendrait deux fonctions arbitraires des variables x, y, z.

Or on obtient une expression de φ_1 appropriée à la discussion du problème, au moyen de la formule de Poisson,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} F(\lambda\sqrt{l^2+m^2+n^2})\,d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} F(n\cos\theta + m\sin\theta\sin\psi + l\sin\theta\cos\psi)\sin\theta\,d\theta, \end{aligned}\right.$$

qui a été démontrée, en dernier lieu, d'une manière aussi simple que rigoureuse, par M. William Roberts [*]; et cette expression de φ_1 sert à trouver celle de φ'.

6. *Calcul de* φ_1 [**]. — Je pose d'abord

$$\varphi = \sin(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t + \upsilon),$$

α, β, γ, υ étant des constantes, et je substitue dans l'équation (9) les valeurs de $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, etc., qui résultent de cette hypothèse; cela donne, entre les indéterminées α, β, γ et δ, l'équation de condition

$$(\Delta)\qquad \delta^2 = a^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

Soient δ et $-\delta$ les valeurs de δ qui la vérifient, l'expression

$$\varphi = \sin(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t + \upsilon) - \sin(\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta t + \upsilon),$$

qui revient à

$$\varphi = 2\cos(\alpha x + \beta y + \gamma z + \upsilon)\sin\delta t,$$

vérifiera l'équation (9). Mais on trouve facilement

$$2\sin\delta t = \delta t\int_{-1}^{1}\cos(\delta t\lambda)\,d\lambda;$$

---

[*] Journal de M. Liouville, année 1846.

[**] D'après la signification physique de la fonction φ, elle est périodique ou indéfiniment décroissante quand t augmente; il est donc naturel de prendre une fonction circulaire ou une exponentielle, pour avoir une solution particulière de l'équation (9), et c'est cette dernière forme que l'on a préférée; mais il résulte du calcul indiqué dans ce numéro, qu'on parvient au même résultat par l'emploi d'une fonction circulaire.

et, en ayant égard à la condition (Δ), on a

$$\int_{-1}^{1} \cos(\delta t \lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \cos[at(\gamma \cos\theta + \beta \sin\theta \sin\psi + \alpha \sin\theta \cos\psi)] \sin\theta\, d\theta,$$

d'après la formule de Poisson; donc, cette solution particulière peut être mise sous la forme

$$\varphi = \frac{\delta t}{2\pi} \cos(\alpha x + \beta y + \gamma z + \upsilon) \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \cos[at(\gamma \cos\theta + \beta \sin\theta \sin\psi + \alpha \sin\theta \cos\psi)] \sin\theta\, d\theta.$$

Si l'on fait entrer $t \cos(\alpha x + \beta y + \gamma z + \upsilon)$ sous le double signe d'intégration, puis qu'on remplace le produit des cosinus par une somme, et qu'on supprime le facteur constant $\frac{\delta}{4\pi}$, qui est inutile, elle devient

$$(11) \quad \varphi = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \left\{ \begin{array}{l} \cos[\alpha(x + at \sin\theta \cos\psi) + \beta(y + at \sin\theta \sin\psi) + \gamma(z + at \cos\theta) + \upsilon] \\ + \cos[\alpha(at \sin\theta \cos\psi - x) + \beta(at \sin\theta \sin\psi - y) + \gamma(at \cos\theta - z) - \upsilon] \end{array} \right\} t \sin\theta\, d\theta.$$

Or, ψ et θ étant considérés comme les deux angles qui déterminent la position d'un point situé sur la sphère de rayon égal à l'unité de longueur, et ayant pour centre l'origine des coordonnées x, y, z, chaque valeur d'un des deux cosinus qui sont ajoutés dans l'expression précédente est multipliée par l'élément correspondant $\sin\theta\, d\theta\, d\psi$ de la surface de cette sphère; mais, pour des éléments diamétralement opposés, la somme des valeurs de θ relatives à ces éléments est π, et la différence de celles de ψ est également π: donc, les deux cosinus dont il s'agit sont égaux, et il en est de même des produits respectifs par $\sin\theta\, d\theta\, d\psi$; par conséquent, on a

$$(12) \quad \varphi = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \cos[\alpha(x + at \sin\theta \cos\psi) + \beta(y + at \sin\theta \sin\psi) + \gamma(z + at \cos\theta) + \upsilon]\, t \sin\theta\, d\theta,$$

en prenant la moitié de la valeur (11).

Soient maintenant $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \upsilon_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \upsilon_2)$, etc., autant de systèmes de valeurs qu'on voudra des arbitraires $(\alpha, \beta, \gamma, \upsilon)$, et φ_1, φ_2, etc., les valeurs correspondantes de φ données par la formule (12); il est évident que l'expression

$$(13) \qquad \varphi = M_1 \varphi_1 + M_2 \varphi_2 + \ldots + M_n \varphi_n + \ldots,$$

composée d'un nombre indéfini de termes, et dans laquelle M_1, M_2, etc., sont des constantes arbitraires, sera encore une solution de l'équation (9).

Donc, P désignant une fonction des trois binômes

$$(A)\quad x + at\sin\theta\cos\psi = x',\quad y + at\sin\theta\sin\psi = y',\quad z + at\cos\theta = z',$$

susceptible d'être développée en une série de la forme

$$M_1\cos(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z' + \upsilon_1) + M_2\cos(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z' + \upsilon_2) + \ldots$$

au moyen d'une détermination convenable des coefficients, mais du reste tout à fait arbitraire, on a

$$(14)\qquad \varphi = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} P t \sin\theta\, d\theta,$$

pour une intégrale qui n'est encore que particulière, attendu qu'il n'y entre qu'une seule fonction arbitraire de x, y, z.

Cela posé, il suffit de remarquer, pour avoir enfin φ, que la dérivée

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\cdot\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} P t \sin\theta\, d\theta$$

de l'expression (14), prise pour φ, vérifie aussi l'équation (9), quelle que soit P, puisqu'on en tire

$$\frac{d^2\cdot\frac{d\varphi}{dt}}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\cdot\frac{d\varphi}{dt}}{dx^2} + \frac{d^2\cdot\frac{d\varphi}{dt}}{dy^2} + \frac{d^2\cdot\frac{d\varphi}{dt}}{dz^2}\right),$$

qui se réduit évidemment à une identité pour les mêmes valeurs de φ que (9). En effet, si l'on ajoute cette dérivée avec l'expression (14) de φ, après y avoir mis des signes différents F et f de fonctions arbitraires des binômes (A), on a

$$(15)\quad \varphi_1 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} F t \sin\theta\, d\theta + \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\cdot\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} f t \sin\theta\, d\theta,$$

qui satisfait aux conditions de contenir deux fonctions arbitraires des

variables indépendantes x, y, z, et de vérifier l'équation (9), dont elle est conséquemment l'intégrale complète [*].

7. En représentant par $d\omega$ l'élément $\sin\theta\, d\theta\, d\psi$ de la surface de la sphère décrite de l'origine pour centre, avec un rayon égal à l'unité de longueur, et par $\sum$ une somme s'étendant à tous les éléments de cette surface, la formule précédente prend la forme plus concise

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi}\sum\left(t\,\mathrm{F} + f + t\frac{df}{dt}\right)d\omega. \tag{16}$$

Si l'on y fait $t = 0$, on a

$$\varphi_1 = f(x, y, z),$$

car

$$\sum d\omega = 4\pi.$$

D'ailleurs, on en tire

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{1}{4\pi}\sum\left(\mathrm{F} + 2\frac{df}{dt} + t\frac{d\mathrm{F}}{dt} + t\frac{d^2 f}{dt^2}\right)d\omega,$$

que $t = 0$ réduit d'abord à

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{1}{4\pi}\sum\left[(\mathrm{F})_0 + 2\left(\frac{df}{dt}\right)_0\right]d\omega,$$

en marquant par l'indice 0 qu'il s'agit des valeurs de F et $\frac{df}{dt}$ correspondantes à $t = 0$; mais on a

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_0 = a\left[\left(\frac{df}{dx}\right)_0 \sin\theta\cos\psi + \left(\frac{df}{dy}\right)_0 \sin\theta\sin\psi + \left(\frac{df}{dz}\right)_0 \cos\theta\right],$$

en suivant la même notation, et $\left(\frac{df}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{df}{dy}\right)_0$, $\left(\frac{df}{dz}\right)_0$ ne contiennent

---

[*] J'ai multiplié par $\frac{1}{4\pi}$, comme on fait toujours, afin de simplifier les expressions de φ_1 et de $\frac{d\varphi_1}{dt}$ correspondantes à $t = 0$.

plus les angles θ et ψ; donc

$$\sum \left(\frac{df}{dt}\right)_0 d\omega = a \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{df}{dx}\right)_0 \int_0^{2\pi} \cos\psi\, d\psi . \int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta \\ + \left(\frac{df}{dy}\right)_0 \int_0^{2\pi} \sin\psi\, d\psi . \int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta \\ + \left(\frac{df}{dz}\right)_0 \int_0^{2\pi} d\psi . \int_0^{\pi} \sin\theta \cos\theta\, d\theta \end{array} \right\},$$

et, comme il y a une intégrale qui est nulle dans chacun des produits de deux intégrales placés entre les accolades,

$$\sum \left(\frac{df}{dt}\right)_0 d\omega = 0;$$

par conséquent,

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = F(x, y, z)$$

pour $t = 0$.

8. *Calcul de* φ'. — En différentiant l'équation (8) par rapport à t, et remplaçant $\frac{d\varphi}{dt}$ par p, on parvient à l'équation

$$\frac{d^2p}{dt^2} = a^2 \left(\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{d^2p}{dy^2} + \frac{d^2p}{dz^2}\right), \tag{17}$$

qui a la même forme que (9), et de laquelle se déduit, au moyen de la formule (15), l'intégrale particulière de (8) désignée par φ'.

A cet effet, on peut poser

$$\varphi' = \int_0^t p\,dt,$$

ce qui astreint φ' à être nulle pour $t = 0$, quelles que soient x, y, z; de sorte que les dérivées de tout ordre de φ' relatives à x, y, z sont aussi nulles, et que l'on doit avoir

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d^2\varphi'}{dt^2} = \Psi(x, y, z), \text{ pour } t = 0,$$

d'après l'équation (8).

La formule (15), appliquée sous ces conditions à l'équation (17),

fournit

$$(18)\quad p = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \Psi\, t \sin\theta\, d\theta + \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\cdot\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \mathrm{f}\, t \sin\theta\, d\theta.$$

f étant une fonction arbitraire des binômes (A), et Ψ la fonction du second membre de l'équation (8) où ces binômes remplacent x, y, z; puis, φ' se déduit de cette valeur de p, en l'intégrant depuis o jusqu'à t après l'avoir multipliée par dt, ce qui donne

$$(19)\quad \varphi' = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \mathrm{f}.\, t \sin\theta\, d\theta + \frac{1}{4\pi}\int_0^{t} t\, dt \int^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \Psi \sin\theta\, d\theta.$$

9. On a enfin, comme je l'ai annoncé au n° 5,

$$(20)\qquad \varphi = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \mathrm{F}.\, t \sin\theta\, d\theta \\ + \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\cdot\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} f.\, t \sin\theta\, d\theta \\ + \frac{1}{4\pi}\int_0^{t} t\, dt \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \Psi \sin\theta\, d\theta \end{array}\right\},$$

par l'addition des formules (15) et (19), et en mettant F au lieu de F + f, attendu que cette somme revient à une fonction arbitraire seulement.

On peut écrire plus simplement cette intégrale générale de l'équation (8), en faisant usage de la notation déjà employée, sous la forme

$$(21)\qquad \varphi = \frac{1}{4\pi}\sum\left(t\mathrm{F} + t\frac{df}{dt} + f + \int_0^{t} \Psi.\, t\, dt\right) d\omega.$$

10. La fonction φ, qui a été astreinte, quand elle a été introduite dans notre analyse (n° 4), à une première condition particulière, peut encore être assujettie à une seconde condition, comme celle d'être nulle pour $t = 0$, quelles que soient x, y, z; de telle sorte que ses dérivées partielles, relatives à ces trois variables, seront en même temps nulles, et que U, V, W seront, d'après les équations (7), les valeurs initiales de u, v, w.

Cela entraîne $f = 0$, et les formules (20) et (21) se réduisent à

$$(22)\quad \varphi = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \mathrm{F}.\, t \sin\theta\, d\theta + \frac{1}{4\pi}\int_0^{t} t\, dt \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \Psi.\sin\theta\, d\theta,$$

et

$$(23)\qquad \varphi = \frac{1}{4\pi}\sum\left(tF + \int_0^t \Psi . t\,dt\right)d\omega,$$

dont l'une ou l'autre donne

$$\frac{d\varphi}{dt} = F(x, y, z) \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

et, par conséquent,

$$\sigma = \frac{1}{a^2}F(x, y, z)$$

à la même époque.

Cette valeur de φ n'aurait d'ailleurs aucun sens, quant au problème de la propagation du son, si les expressions des dérivées partielles $\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\varphi}{dx}, \ldots$, cessaient d'avoir des valeurs très-petites (n° 3).

§ II

Discussion de l'intégrale (22). — *Lois qu'elle fournit.*

11. La formule (22) donne immédiatement quelques-unes des lois du mouvement.

L'ébranlement primitif doit, en général, être considéré comme limité à de certaines parties du fluide que l'on peut renfermer dans une sphère (E), de rayon ε, décrite de l'origine pour centre. D'après cela, la fonction $F(x, y, z)$ ne peut être différente de 0 que pour des valeurs de x, y, z égales aux coordonnées de certains points renfermés dans cette sphère; et il en est de même de $\Psi(x, y, z)$, car U, V, W, qui sont maintenant les valeurs initiales de u, v, w, sont nulles pour tous les points extérieurs à la sphère (E). On a donc, pour ces derniers points,

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz},$$

à un instant quelconque, et ces équations donnent

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = d\varphi,$$

$d\varphi$ étant la différentielle de la fonction φ de x, y, z, t relative aux trois premières de ces variables.

12. Soient ξ, η, ζ les coordonnées d'un point intérieur à la sphere (E), et posons

$$x + at\sin\theta\cos\psi = \xi, \quad y + at\sin\theta\sin\psi = \eta, \quad z + at\cos\theta = \zeta,$$

d'où l'on déduit facilement l'équation

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = a^2t^2,$$

qui détermine une sphère de rayon at, dont le centre est le point (x, y, z), en considérant ξ, η, ζ comme coordonnées courantes.

Ce sera seulement (n° **11**) dans le cas où cette sphère coupera la partie du fluide primitivement ébranlée, que le premier terme de la formule (22) ne sera pas nul, c'est-à-dire, en désignant par r la distance du point (x, y, z) à l'origine, quand at tombera entre $r-\varepsilon$ et $r+\varepsilon$.

Tant qu'on aura $at < r-\varepsilon$, le second terme de la même formule sera aussi nul; car, si l'on renverse l'ordre des intégrations indiquées dans ce terme, ce qui ne saurait en changer la valeur, et qu'on commence par celle qui est relative à t, on voit que tous les éléments de

$$\int_0^t \Psi(x + at\sin\theta\cos\psi, \quad y + at\sin\theta\sin\psi, \quad z + at\cos\theta)\, t\,dt,$$

qu'il faudrait calculer d'abord, sont séparément nuls. Mais, quand at tombe entre les limites indiquées ci-dessus, cette intégrale se réduit à $\int_{\frac{r-\varepsilon}{a}}^{t} \Psi . t\,dt$; et quand at surpasse $r+\varepsilon$, à $\int_{\frac{r-\varepsilon}{a}}^{\frac{r+\varepsilon}{a}} \Psi t\,dt$. On pourra donc remplacer la derniere intégrale multiple de l'équation (22) par

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\frac{r-\varepsilon}{a}}^{t} t\,dt \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \Psi\sin\theta\,d\theta,$$

si t surpasse $\frac{r-\varepsilon}{a}$; et même, si t surpasse $\frac{r+\varepsilon}{a}$, on pourra mettre cette quantité, qui sera plus loin supposée fixe, au lieu de la limite variable désignée par t.

$\int \Psi . t\,dt$, prise depuis $t = \frac{r-\varepsilon}{a}$ jusqu'à $t \overset{<}{\underset{=}{\text{ou}}} \frac{r+\varepsilon}{a}$, n'étant pas nulle, φ ne le deviendra pas de nouveau quand t dépassera $\frac{r+\varepsilon}{a}$, non plus que $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ auxquelles se réduisent u, v, w pour les points situés au dehors de la sphère (E); mais ces quantités seront indépendantes de t.

13. Il n'en est pas de même de l'expression de $\frac{d\varphi}{dt}$, tirée de la formule (22), savoir,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \left(F + t\frac{dF}{dt}\right) \sin\theta\, d\theta + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \Psi . t \sin\theta\, d\theta;$$

en effet :

1°. F et Ψ sont nulles pour tous les points dont il s'agit;

2°. De

$$F(x + at\sin\theta\cos\psi,\ y + at\sin\theta\sin\psi,\ z + at\cos\theta) = F(\xi, \eta, \zeta),$$

on tire

$$\frac{dF}{dt} = a\left(\frac{dF}{d\xi}\sin\theta\cos\psi + \frac{dF}{d\eta}\sin\theta\sin\psi + \frac{dF}{d\zeta}\cos\theta\right),$$

et $F(\xi, \eta, \zeta)$ étant nulle pour toutes valeurs de ξ, η, ζ qui seraient les coordonnées de points situés au dehors de la sphère (E), les dérivées $\frac{dF}{d\xi}$, $\frac{dF}{d\eta}$, $\frac{dF}{d\zeta}$, et, par suite, $\frac{dF}{dt}$ le sont également; donc, $\frac{d\varphi}{dt}$ est nulle pour toute valeur de t non comprise entre $\frac{r-\varepsilon}{a}$ et $\frac{r+\varepsilon}{a}$.

14. *Pour les points compris dans la sphère* (E), r est moindre que ε, et il faut modifier légèrement ce qui est dit dans les n^os^ **12** et **13**. On ne doit pas changer la limite inférieure o de l'intégration relative à t dans le second terme de l'expression (22), et l'on peut seulement mettre $\frac{r+\varepsilon}{a}$ au lieu de t pour la limite supérieure, lorsque t surpasse cette valeur. Quant à $\frac{d\varphi}{dt}$, elle est nulle pour les valeurs de t qui ne tombent pas entre o et $\frac{r+\varepsilon}{a}$.

15. Il résulte de cette discussion, qu'en un point (x, y, z) situé à une distance quelconque r de l'origine, et à la fin du temps t supérieur à $\frac{r+\varepsilon}{a}$, il pourrait y avoir un mouvement de translation uniforme et tres-lent [*] des molécules du fluide, lequel ne serait pas accompagné de condensation, car σ est nul avec $\frac{d\varphi}{dt}$ en vertu de l'équation (6); mais, que les vibrations accompagnées de condensation n'auront lieu que quand t tombera entre $\frac{r-\varepsilon}{a}$ et $\frac{r+\varepsilon}{a}$, c'est-a-dire pendant une durée limitée qui ne pourra surpasser la différence $\frac{2\varepsilon}{a}$.

Si l'ébranlement primitif s'étend à tous les points de la sphere (E), les ondes sonores seront sphériques, d'épaisseur 2ε, et auront l'origine pour centre; la durée du mouvement vibratoire sera $\frac{2\varepsilon}{a}$ en chaque point; et la vitesse de propagation de ce mouvement sera a, puisqu'il commence en des points situés sur le même rayon, distants de a, à des intervalles égaux à l'unité de temps.

On conçoit d'ailleurs que, quoique tous les points compris dans la sphere (E) n'aient pas été primitivement ébranlés, les circonstances que je viens d'indiquer auront encore sensiblement lieu, a des distances de cette sphère assez grandes relativement à son rayon.

§ III.

Loi de l'intensite du son a différentes distances du centre de l'ébranlement. — Rapport constant de la vitesse propre des molécules vibrantes à la condensation

16. Afin de parvenir à la loi des vitesses des molécules du fluide, de laquelle dépend celle de l'intensité du son à différentes distances de l'origine, que nous supposerons fort grandes relativement au rayon

---

[*] La vitesse de ce mouvement qui depend seulement des vitesses initialement imprimées a des parties du fluide renferme dans la sphère (E), est tres-petite par rapport à celle du mouvement vibratoire (n° 22).

de la sphère (E), il faut avoir recours à une transformation de l'équation (22) que je vais exposer.

Soient

$$(24)\qquad \begin{cases} x = r\sin\mu\cos\lambda, \\ y = r\sin\mu\sin\lambda, \\ z = r\cos\mu, \end{cases}$$

et

$$(25)\qquad \begin{cases} r\sin\mu\cos\lambda + at\sin\vartheta\cos\psi = r_1\sin\mu_1\cos\lambda_1, \\ r\sin\mu\sin\lambda + at\sin\vartheta\sin\psi = r_1\sin\mu_1\sin\lambda_1, \\ r\cos\mu + at\cos\vartheta = r_1\cos\mu_1, \end{cases}$$

r_1 étant une longueur positive qui ne surpasse pas ε, puisqu'il suffit de tenir compte des valeurs des binômes (A) qui peuvent être respectivement celles des coordonnées de certains points situés dans la sphère (E); et λ_1, μ_1 étant des angles compris, le premier entre 0 et 2π, et le second entre 0 et π.

Soient encore

$$(26)\qquad at = r - r', \quad \vartheta = \pi - \mu + \vartheta' \quad \text{et} \quad \psi = \pi + \lambda + \psi',$$

r' est compris entre $+\varepsilon$ et $-\varepsilon$ d'après ce qui précède, et je vais montrer que les deux dernières hypothèses, ingénieusement choisies par Poisson, sont telles, que ϑ' et ψ' peuvent être considérés comme très-petits du même ordre que $\frac{\varepsilon}{r}$.

17. D'après la troisième équation (25), $\cos\mu + \frac{at}{r}\cos\vartheta$ est au moins de cet ordre; donc, $\cos\mu$ et $\cos\vartheta$ doivent être de signes contraires, s'ils ne sont pas tous deux très-petits du même ordre au moins.

Dans le premier cas, μ et ϑ sont l'un plus grand, l'autre plus petit que $\frac{\pi}{2}$, et $\mu + \vartheta$ tombe entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$: donc l'égalité $\vartheta' = \mu + \vartheta - \pi$ montre que ϑ' ne peut être en dehors des limites $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$: et il en résulte encore que, si cet angle est positif, il ne peut surpasser μ en grandeur absolue.

La même équation donne, d'après les hypothèses (26),

$$\cos(\mu - \theta') - \cos\mu = \frac{r'\cos(\mu - \theta') - r_1\cos\mu_1}{r};$$

or, les cosinus de $\mu - \theta'$ et de μ sont de même signe, puisque le premier revient à $-\cos\theta$; donc la différence arithmétique de ces cosinus est au moins du même ordre que $\frac{\varepsilon}{r}$; mais, pour qu'en ajoutant à μ, ou en retranchant de μ un arc qui ne surpasse pas $\frac{\pi}{2}$, on puisse avoir pour résultat un arc dont le cosinus ne diffère de celui de μ que d'une quantité très-petite de cet ordre, il faut évidemment que l'arc ajouté ou retranché $\pm\theta'$ soit du même ordre au moins.

Dans le second cas, μ et θ ne peuvent différer l'un et l'autre de $\frac{\pi}{2}$ que d'une quantité du même ordre que $\frac{\varepsilon}{r}$, et l'inspection seule de $\theta' = \mu + \theta - \pi$ fait voir que θ' est au moins de cet ordre.

Je remarquerai que, d'après cette première partie de ma démonstration, $\sin\mu$ ne saurait être très-petit sans qu'il en soit de même de $\sin\theta$; et *vice versâ*.

18. On déduit facilement des équations (25)

$$r_1^2 = r^2 + a^2t^2 + 2rat[\cos\mu\cos\theta + \sin\mu\sin\theta\cos(\psi - \lambda)];$$

d'après (26), on a aussi

$$\cos\theta = -\cos\mu - \theta'\sin\mu, \quad \text{et} \quad \sin\theta = \sin\mu - \theta'\cos\mu,$$

en prenant $\cos\theta' = 1$ et $\sin\theta' = \theta'$ [ce qui revient à négliger les quantités très-petites du même ordre que $\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^2$], et

$$\cos(\psi - \lambda) = -\cos\psi';$$

donc

$$r_1^2 = r^2 + a^2t^2$$
$$- 2rat[\cos^2\mu + \theta'\sin\mu\cos\mu + (\sin^2\mu - \theta'\sin\mu\cos\mu)\cos\psi'],$$

d'où l'on tire, en posant $\cos\psi' = 1 - \alpha$,

$$r_1^2 = (r - at)^2 + 2rat\alpha(\sin^2\mu - \theta'\sin\mu\cos\mu),$$

puis

$$\alpha \sin \mu \sin \theta = \frac{r_1^2 - r'^2}{2rat},$$

relation de laquelle il résulte que $\alpha = \sin \text{verse}\, \psi'$ est au moins très-petite du même ordre que $\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^2$, et, par suite, que ψ' l'est au moins du même ordre que $\frac{\varepsilon}{r}$, pourvu que les sinus de μ et de θ ne soient pas très-petits.

On s'explique cette exception, en observant que dans la circonstance particulière qui y conduit, les deux premières équations (25) n'astreindraient ni l'angle ψ, ni ses lignes trigonométriques, à aucune condition relativement à λ, ou aux lignes de cet angle; on peut la lever, en convenant de ne point prendre des axes tels, que celui des z forme avec la direction du rayon vecteur r un angle dont le sinus serait très-petit : cette convention ne diminue pas, d'ailleurs, la généralité de la formule (22).

19. Les équations (25) peuvent, d'après cela, être réduites à

$$(27)\quad \begin{cases} r' \sin\mu \cos\lambda + r\theta' \cos\lambda \cos\mu + r\psi' \sin\lambda \sin\mu = r_1 \sin\mu_1 \cos\lambda_1, \\ r' \sin\mu \sin\lambda + r\theta' \sin\lambda \cos\mu - r\psi' \cos\lambda \sin\mu = r_1 \sin\mu_1 \sin\lambda_1, \\ r' \cos\mu - r\theta' \sin\mu = r_1 \cos\mu_1, \end{cases}$$

qui fournissent

$$(28)\qquad r_1^2 = r'^2 + r^2 (\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2 \mu.$$

Pour l'objet que je me propose maintenant, il faut considérer r comme une distance déterminée quelconque, très-grande par rapport à ε, et les angles λ et μ comme se rapportant à une direction déterminée qui peut aussi être quelconque.

D'après cela, les équations (26) donnent

$$dt = -\frac{dr'}{a}, \quad d\theta = d\theta', \quad d\psi = d\psi'.$$

On a aussi

$$r' = \pm \varepsilon, \quad \text{aux limites} \quad t = \frac{r \mp \varepsilon}{a},$$

$$\theta' = -\pi + \mu \quad \text{et} \quad \theta' = \mu, \quad \text{aux limites} \quad \theta = 0 \quad \text{et} \quad \theta = \pi,$$

ainsi que

$$\psi' = -\pi - \lambda \quad \text{et} \quad \psi' = \pi - \lambda, \quad \text{aux limites} \quad \psi = 0 \quad \text{et} \quad \psi = 2\pi.$$

L'équation (22) devient donc

$$(29)\quad \varphi = \frac{r \sin\mu}{4\pi a}\left(\int_{-\pi-\lambda}^{\pi-\lambda} d\psi' \int_{-\pi+\mu}^{\mu} F_1 . d\theta' + \frac{1}{a}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dr' \int_{-\pi-\lambda}^{\pi-\lambda} d\psi' \int_{-\pi+\mu}^{\mu} \Psi_1 . d\theta'\right),$$

en négligeant les termes qui contiennent comme facteurs r' ou θ' par rapport à ceux qui contiennent r, et en désignant par F_1 et Ψ_1 ce que deviennent les fonctions F et Ψ quand on remplace les binômes (A) par leurs valeurs en fonctions de r'; ψ' et θ', c'est-à-dire, par les premiers membres des équations (27).

Mais les intégrales qui entrent dans cette expression de φ contiennent toujours r explicitement, ce qu'il faut éviter.

20. Pour cela, on change encore de variables, et je poserai, d'après Poisson,

$$(30)\qquad \theta' r = s \sin s_1, \quad \psi' r \sin\mu = s \cos s_1$$

s_1 étant un arc compris entre 0 et 2π, et s une quantité positive.

Ces équations fournissent, en observant la règle de la transformation des coordonnées dans les intégrales multiples,

$$r \sin\mu . d\psi' = ds \cos s_1 - s ds_1 \sin s_1,$$
$$0 = ds \sin s_1 + s ds_1 \cos s_1,$$

d'où

$$r \sin\mu . d\psi' = \frac{s ds_1}{\sin s_1},$$

puis

$$r d\theta' = ds . \sin s_1;$$

et, par suite,

$$r^2 \sin\mu . d\theta' . d\psi' = s ds . ds_1.$$

Donc, comme l'équation (28) donne

$$s = \sqrt{r_1^2 - r'^2},$$

et que r_1 ne doit pas surpasser ε, la précédente valeur de φ prend la

forme

$$(31)\quad \varphi = \frac{1}{4\pi ar}\int_0^{\sqrt{\varepsilon^2-r'^2}} sds \int_0^{2\pi} F_2 ds_1 + \frac{1}{4\pi a^2 r}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dr' \int_0^{\sqrt{\varepsilon^2-r'^2}} sds \int_0^{2\pi} \Psi_2 ds_1,$$

en désignant par F_2, Ψ_2 ce que deviennent F_1, Ψ_1 quand on remplace $\theta' r$ et $\psi' r$ par les valeurs de ces quantités en fonction de s et s_1 déterminées par les équations (30); de sorte que le premier terme de cette formule est, abstraction faite du coefficient $\frac{1}{4\pi ar}$, une fonction des trois variables r', λ, μ, et le second terme, aussi abstraction faite du coefficient $\frac{1}{4\pi a^2 r}$, une fonction de ces deux dernières variables seulement.

21. L'équation (31) se rapporte à une direction quelconque des axes des coordonnées, sauf la restriction que j'ai posée dans le n° **18**. Par conséquent, il est permis de disposer de cette direction, comme je vais le dire, afin de simplifier la suite du raisonnement.

On a maintenant

$$r = \text{const.}, \quad \lambda = \text{const.}, \quad \mu = \text{const.};$$

ce qui représente :

1°. Une sphère de rayon r, dont le centre est à l'origine;

2°. Un plan passant par l'axe des z et faisant l'angle λ avec celui des $\widehat{xz}$;

3°. Un cône droit, dont l'axe des z est l'axe de figure.

Ces trois surfaces, qui sont orthogonales, se coupent au point que l'on considère, et, en prenant respectivement pour axes des x_1, y_1, z_1 l'intersection du plan et du cône, la tangente à celle de la sphère et du cône, et la tangente à celle de la sphère et du plan, on a évidemment

$$(32)\qquad dx_1 = dr, \quad dy_1 = r\sin\mu\, d\lambda, \quad dz_1 = r\, d\mu.$$

Si l'on dirige l'axe des x suivant la même droite que celui des x_1, en faisant tourner le premier système autour de son origine, de manière que, en outre, les axes des y et des z deviennent respectivement parallèles à ceux des y_1 et des z_1, il suffit d'augmenter x_1, y_1,

et z_1 de certaines constantes, pour passer de ces derniers axes aux nouveaux axes des x, y, z, et de faire $\lambda = 0$, $\mu = \frac{\pi}{2}$. Donc,

$$(33) \qquad dx = dr, \quad dy = r\,d\lambda, \quad dz = r\,d\mu \text{ [*]}.$$

Cela posé, on doit seulement prendre

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz},$$

d'après la remarque du n° **11**; et, en vertu des formules (33), ces expressions des composantes de la vitesse correspondante au point déterminé par les coordonnées polaires r, λ, μ deviennent

$$(34) \qquad u = \frac{d\varphi}{dr}, \quad v = \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{d\lambda}, \quad w = \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{d\mu}.$$

d'après le principe de la dérivation des fonctions médiates.

On déduit facilement de ces dernières expressions que les rapports $\frac{v}{u}$ et $\frac{w}{u}$ sont du même ordre que $\frac{\varepsilon}{r}$, pourvu que les dérivées partielles de $F(x, y, z)$ et de $\Psi(x, y, z)$ aient entre elles des rapports finis, ce qui a lieu en général; donc la vitesse de chaque molécule de fluide est sensiblement égale à $\frac{d\varphi}{dr}$, et dirigée suivant le rayon vecteur.

22. On a, d'après l'équation (31),

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} = &-\frac{1}{4\pi a r^2}\left(\int_0^{\sqrt{\varepsilon^2 - r'^2}} s\,ds \int_0^{2\pi} F_2\,ds_1 + \frac{1}{a}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dr' \int_0^{\sqrt{\varepsilon^2 - r'^2}} s\,ds \int_0^{2\pi} \Psi_2\,ds_1\right) \\ &+ \frac{1}{4\pi a r}\frac{d}{dr'}\cdot\int_0^{\sqrt{\varepsilon^2 - r'^2}} s\,ds \int_0^{2\pi} F_2\,ds_1, \end{aligned} \right.$$

en ayant égard à l'observation qui termine le n° **20**, et à ce que la première équation (26) donne

$$\frac{dr'}{dr} = 1,$$

quand on regarde t comme constant.

---

[*] On ne peut craindre que la formule (31) tombe en défaut pour les nouveaux axes, car celui des x coïncide avec le rayon vecteur, et le sinus de l'angle compris entre ce rayon et l'axe des z est conséquemment égal à 1.

Si l'on néglige, dans cette formule, le terme qui contient $\frac{1}{r}$ comme facteur, par rapport à celui qui contient seulement $\frac{1}{r}$, et qu'on prenne

$$(36) \qquad u = \frac{1}{4\pi ar}\frac{d}{dr'}\cdot\int_0^{\sqrt{\varepsilon^2 - r'^2}} sds \int_0^{2\pi} F_2 ds_1,$$

on voit que la vitesse des molécules de fluide est, à très-peu près, inversement proportionnelle à la distance de l'origine au lieu où elles se trouvent quand elles vibrent; ce qui justifie *la loi de l'intensité du son en raison inverse du carré de la distance*, puisqu'on admet que cette intensité est proportionnelle au carré de la vitesse.

D'après la discussion du n° **12**, le terme de la valeur (35) de $\frac{d\varphi}{dr}$, qui dépend de Ψ, est le seul qui ne devienne pas nul quand t surpasse $\frac{r+\varepsilon}{a}$; or, ce terme contenant $\frac{1}{r^2}$ comme facteur, il est très-petit par rapport à la valeur (36) de u, et cela s'accorde avec ce que j'ai dit au commencement du n° **15**.

23. D'après la première des équations (26),

$$\frac{dr'}{dt} = -a$$

lorsque r est considéré comme constant; donc l'équation (6) devient

$$\sigma = -\frac{1}{a}\frac{d\varphi}{dr'};$$

or on tire de l'équation (31)

$$\frac{d\varphi}{dr'} = \frac{1}{4\pi ar}\frac{d}{dr'}\cdot\int_0^{\sqrt{\varepsilon^2 - r'^2}} sds \int_0^{2\pi} F_2 ds_1;$$

et, par conséquent, on a

$$(37) \qquad \sigma = -\frac{1}{4\pi a^2 r}\frac{d}{dr'}\cdot\int_0^{\sqrt{\varepsilon^2 - r'^2}} sds \int_0^{2\pi} F_2 ds_1.$$

Les formules (36) et (37) donnent

$$\sigma = -\frac{u}{a}.$$

d'où l'on conclut d'abord que les molécules qui s'éloignent du centre d'ébranlement, sur chaque rayon vecteur, sont condensées, et celles qui s'en rapprochent, dilatées; puis, que le rapport $\frac{a}{\rho_0}$ de la vitesse constante de la propagation du son à la densité du milieu est, abstraction faite du signe, approximativement égal au rapport de la vitesse propre des molécules à la condensation positive ou négative qu'elles éprouvent; de sorte que ce dernier rapport est constant pour le même milieu.

§ IV.

Hypothèse particulière du trinôme $U\,dx + V\,dy + W\,dz$, *différentielle exacte.*

24. Si l'on admet que les composantes U, V, W de la vitesse initiale soient les dérivées d'une fonction f de x, y, z, les équations (7) deviennent

$$(38)\qquad u = \frac{d.(\varphi + f)}{dx},\quad v = \frac{d.(\varphi + f)}{dy},\quad w = \frac{d.(\varphi + f)}{dz}.$$

D'ailleurs, comme $\frac{df}{dt} = 0$, puisque f est supposée indépendante de t, l'hypothèse (6) peut être écrite sous la forme

$$(39)\qquad \sigma = \frac{1}{a^2}\frac{d.(\varphi + f)}{dt}.$$

La quatrième équation (5) devient alors

$$(40)\qquad \frac{d^2.(\varphi + f)}{dt^2} = a^2\left[\frac{d^2.(\varphi + f)}{dx^2} + \frac{d^2.(\varphi + f)}{dy^2} + \frac{d^2.(\varphi + f)}{dz^2}\right],$$

et elle ne diffère plus de l'équation (9) que par le changement de φ en $\varphi + f$.

Or, il faut que $\varphi + f$ se réduise à $f(x, y, z)$ pour $t = 0$, et que $\frac{d\varphi}{dt}$ ou $\frac{d.(\varphi + f)}{dt}$ soit toujours, en même temps, une fonction arbitraire de x, y, z, que nous continuerons de représenter par $F(x, y, z)$;

donc l'intégrale de l'équation (40) sera

$$(41)\qquad \varphi + f = \frac{1}{4\pi}\sum\left(t\mathrm{F} + f + t\frac{df}{dx}\right)d\omega,$$

d'après la formule (16) du n° **7**.

Les transformations par lesquelles l'équation (31) a été déduite de l'équation (22), peuvent être appliquées successivement à l'équation (41); elles donnent

$$(42)\qquad \varphi = \frac{1}{4\pi r}\left(\frac{1}{a}\int_0^{\sqrt{\varepsilon^2 - r'^2}} s\,ds \int_0^{2\pi} \mathrm{F}_2\,ds_1 - \frac{d}{dr'}\int_0^{\sqrt{\varepsilon^2 - r'^2}} s\,ds \int_0^{2\pi} f_2\,ds_1\right)$$

en observant que $f(x, y, z)$ est nulle pour les valeurs de x, y, z qui ne se rapportent pas à des points compris dans la sphère (E), et F_2, f_2 procédant de F, f, comme cela a été expliqué pour F_2 dans les n^{os} **19** et **20**.

25. On déduit facilement de l'équation (41) que φ est nulle pour les points extérieurs à la sphère (E), tant que t ne tombe pas entre $\frac{r-\varepsilon}{a}$ et $\frac{r+\varepsilon}{a}$ (n° **11**); donc, le mouvement n'a, en chacun de ces points, qu'une durée qui ne peut excéder $\frac{2\varepsilon}{a}$, et le repos s'y rétablit ensuite complétement.

Pour tout point intérieur ou extérieur à la sphère (E), on a, d'après les équations (38) et (41),

$$u = \frac{1}{4\pi}\sum\left(t\frac{d\mathrm{F}}{dx} + \frac{df}{dx} + t\frac{d^2 f}{dx\,dt}\right)d\omega$$

[F et f représentant, comme dans l'équation (41), ce que deviennent $\mathrm{F}(x, y, z)$ et $f(x, y, z)$, par la substitution des binômes (A) à x, y, z], et deux valeurs semblables pour v, w; or, il résulte de ces expressions, que le repos se rétablit aussi en chaque point compris dans la sphère de l'ébranlement initial, lorsque t surpasse $\frac{r+\varepsilon}{a}$.

Il y a donc une différence qui me paraît assez remarquable, entre les conséquences auxquelles conduisent les équations (23) et (41), par

rapport au retour des molécules à l'état de repos, qui ne semble pas devoir nécessairement s'établir après que le mouvement vibratoire a cessé, d'après l'équation (23) du n° **15**.

26. En vertu de l'équation (42), φ est de la forme

$$\varphi = \frac{1}{r}\Phi(r', \lambda, \mu),$$

comme lorsqu'on ne fait aucune hypothèse particulière sur U, V, W; donc, on déduirait de cette équation les conséquences que j'ai déjà exposées dans les n^{os} **21** et suivants, soit relativement à la direction et à la grandeur des vitesses propres des molécules du fluide, soit relativement à la condensation ou à la dilatation qu'elles éprouvent pendant la durée du mouvement.

§ V.

De la marche suivie dans cette thèse.

27. Les premiers travaux mathématiques sur la propagation du son dans un milieu indéfini sont dus à Lagrange; Euler s'en est ensuite occupé, puis Laplace qui a rectifié la valeur de la vitesse de propagation du mouvement, en tenant compte de la chaleur développée par la compression; enfin, Poisson a consacré à ce problème deux de ses beaux Mémoires sur la physique mathématique.

Les deux premiers de ces illustres savants ont supposé que la masse fluide étendue indéfiniment en tous sens, a d'abord été ébranlée semblablement suivant toutes les directions, autour du point pris pour origine des coordonnées; alors $udx + vdy + wdz$ est toujours égale à la différentielle relative à r, d'une fonction de r et de t; et l'équation qu'il s'agit d'intégrer ne diffère pas de celle du problème des cordes vibrantes.

Dans le premier en date des deux Mémoires de Poisson, il avait adopté l'hypothèse du *trinôme des vitesses différentielle exacte*, et transformé premièrement en coordonnées polaires l'équation (9) à laquelle il arrivait par le théorème de Lagrange sur ce trinôme.

Si l'on appliquait cette transformation à l'équation (8), d'après les

formules (24), on aurait [*]

$$\frac{d^2.r\varphi}{dt^2} = a^2\left[\frac{d^2.r\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\mu}\frac{d^2.r\varphi}{d\lambda^2} + \frac{1}{r^2\sin\mu}\frac{d\left(\sin\mu\,\frac{d.r\varphi}{d\mu}\right)}{d\mu}\right] + r\Psi_1(r,\lambda,\mu),$$

Ψ_1 représentant ici ce que devient Ψ par la substitution, au lieu de x, y, z, de leurs valeurs (24).

En intégrant les deux membres depuis o jusqu'à 2π pour λ, et depuis o jusqu'à π pour μ, après les avoir multipliés par $\sin\mu\,d\lambda\,d\mu$, comme dans ce Mémoire, on a

$$(\Phi)\qquad \frac{d^2.r\Phi}{dt^2} = a^2\frac{d^2.r\Phi}{dr^2} + r\chi,$$

si l'on pose

$$\int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\pi} \varphi\sin\mu\,d\mu = \Phi,$$

---

[*] On peut la faire d'une manière assez peu connue, au moyen de deux remarques fort simples :

1°. φ étant une fonction de x, y, z, ou du moins une fonction dans laquelle x, y, z sont regardées comme les seules variables, la quantité

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2$$

ne change pas de forme ni de valeur, quand on déplace, d'une manière quelconque, les axes rectangulaires des x, y, z.

2°. La variation de l'intégrale triple

$$\iiint\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]dx\,dy\,dz,$$

étendue à tous les éléments du volume compris dans une enveloppe constante et provenant de celle d'un paramètre quelconque contenu dans la fonction φ, est

$$-2\iiint\delta\varphi\cdot\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)dx\,dy\,dz.$$

Cela posé, si l'on dirige les nouveaux axes comme cela est expliqué à l'article **21**, on a, d'après les formules (32),

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\mu}\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{d\varphi}{d\mu}\right)^2:$$

et

$$\int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\pi} \Psi_1 \sin\mu\, d\mu = \chi,$$

Φ étant une fonction de r et de t, et χ une fonction de r seulement.

Or, il est facile de vérifier que l'expression

$$r\Phi = f_1(r+at) + f_2(r-at) - \frac{1}{a^2}\int_0^r dr \int_0^r r\chi\, dr,$$

---

d'ailleurs,

$$dx\,dy\,dz = r^2 \sin\mu\, dr\, d\lambda\, d\mu;$$

donc

$$\iiint \left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] dx\,dy\,dz$$
$$= \iiint \left[\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\mu}\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{d\varphi}{d\mu}\right)^2\right] r^2 \sin\mu\, dr\, d\lambda\, d\mu;$$

ces intégrales triples s'étendant à tous les éléments d'un espace déterminé.

Les variations de ces intégrales correspondantes à celles d'un paramètre quelconque contenu dans la fonction φ doivent être égales; donc

$$\iiint \delta\varphi \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) dx\,dy\,dz$$
$$= \iiint \delta\varphi \left[\frac{d.\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)}{dr} + \frac{1}{\sin^2\mu}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + \frac{1}{\sin\mu}\frac{d.\left(\sin\mu\frac{d\varphi}{d\mu}\right)}{d\mu}\right] \sin\mu\, dr\, d\lambda\, d\mu;$$

et, comme cette égalité doit subsister quelle que soit $\delta\varphi$ pour chacun des elements de volume représentés par

$$dx\,dy\,dz = r^2 \sin\mu\, dr\, d\lambda\, d\mu,$$

on a

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{1}{r^2}\left[\frac{d.\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)}{dr} + \frac{1}{\sin^2\mu}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + \frac{1}{\sin\mu}\frac{d.\left(\sin\mu\frac{d\varphi}{d\mu}\right)}{d\mu}\right].$$

Enfin, si l'on observe que

$$\frac{1}{r}\frac{d.\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)}{dr} = r\frac{d^2\varphi}{dr^2} + 2\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d.\left(r\frac{d\varphi}{dr} + \varphi\right)}{dr} = \frac{d^2.r\varphi}{dr^2}.$$

et que

$$r\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2.r\varphi}{dt^2},$$

on tombe facilement sur l'équation du texte.

contenant deux fonctions arbitraires f_1 et f_2, satisfait à l'équation (Φ); mais on ne déduit que très-péniblement les propriétés de la fonction φ, qu'on a besoin de connaître, de celles de Φ, et l'on ne parvient pas ainsi à la loi des intensités du son à différentes distances du centre d'ébranlement. C'est par la réduction de sa quantité φ en une série d'intégrales ordonnée suivant le nombre croissant des intégrations, que Poisson a d'abord démontré cette loi.

28. J'ai principalement dû puiser dans le second des deux Mémoires précités, et je vais indiquer brièvement en quoi je m'en suis surtout écarté.

J'ai fait usage (n^{os} **6** et suivants), pour parvenir à la valeur (20), de considérations bien différentes de celles qu'on y trouve; car c'est par la formule de Fourier étendue à trois variables, que cette valeur y est obtenue : la marche que j'ai suivie est due, je crois, à M. Liouville.

Il m'a paru convenable d'étudier d'abord le mouvement sans rien supposer de particulier sur le mode d'ébranlement initial, et de ne passer qu'ensuite à l'examen de l'hypothèse que le trinôme $Udx + Vdy + Wdz$ soit la différentielle d'une fonction de x, y, z; car on est plus logiquement conduit à faire cette hypothèse particulière, après qu'on a reconnu (n° **11**) que $udx + vdy + wdz$ est toujours la différentielle relative à x, y, z d'une fonction de ces trois variables et de t pour les points extérieurs à la sphère d'ébranlement.

Au lieu de déduire de la valeur (20) de φ, celle qui convient à ce cas particulier, je remonte à l'équation de laquelle cette fonction doit dépendre, ce qui m'a paru beaucoup plus simple.

Enfin, je ferai remarquer que j'ai essayé de fixer rigoureusement (n^{os} **17** et suivants) la nature des variables auxiliaires ϑ' et ψ' employées par Poisson pour transformer une équation semblable à (41), en appliquant sa transformation à la valeur de φ fournie par l'équation (22); j'ose croire qu'on ne me saura pas mauvais gré d'avoir insisté un peu longuement sur ce point qui est important, car de là dépendent toutes les réductions subséquentes qui permettent d'arriver à la loi de l'intensité du son.

THÈSE D'ASTRONOMIE.

Sur les réfractions atmosphériques;

PAR M. TH. DIEU,
Professeur de Mathématiques supérieures au Lycée de Dijon.

Préliminaires.

1. La simple inspection du mouvement des corps célestes, un petit nombre étant exceptés, a conduit à cette idée fondamentale qu'on peut s'en rendre compte en les supposant enchâssés dans une sphère qui tournerait autour d'un diamètre fixe passant par l'œil de l'observateur et incliné à son horizon.

Le plus grand nombre d'entre eux a donc reçu le nom d'*astres fixes*, et quelques-uns celui de *planètes;* parce que les premiers se lèvent et se couchent aux mêmes points de l'horizon, et semblent décrire respectivement les mêmes cercles dans le ciel; tandis que les derniers se déplacent parallèlement à l'axe fixe du mouvement général, et que leur mouvement paraît pouvoir être décomposé en deux autres fictifs, l'un parallèle, l'autre perpendiculaire à cet axe.

Les observations faites au moyen des gnomons et du cadrán équinoxial pour le Soleil, des armilles, des cercles ou secteurs équatoriaux et des machines parallactiques pour le Soleil et les autres astres visibles avec ces instruments, confirment cette première apparence.

Cependant les anciens astronomes avaient remarqué vers l'horizon une irrégularité qu'ils n'avaient guère, dit Delambre, le moyen de mesurer, et qu'ils attribuèrent à l'existence des vapeurs qui s'y trouvent en plus grande abondance qu'à une certaine hauteur.

Grâce à l'invention des lunettes, à celle des horloges, et aux perfectionnements apportés dans la construction des instruments, les astronomes modernes ont fini par reconnaître que cette irrégularité se faisait sentir à toute distance zénithale; et comme elle s'explique par la théorie physique de la simple réfraction, le nom de *réfraction atmosphérique* lui a été attribué.

Voici comment on peut s'assurer de l'existence de cette irrégularité.

Soient P le pôle, Z le zénith de l'observateur, PMP′ son méridien, et A la position apparente d'une étoile.

On obtient de diverses manières la distance zénithale PZ du pôle : on peut observer la distance méridienne PA′ de l'étoile au pôle qui est le complément de sa déclinaison, ainsi que sa distance zénithale AZ et son azimut PZA; enfin, on peut déduire de l'observation du passage de l'étoile au méridien, l'angle horaire APZ, différence des ascensions droites du zénith et de l'astre, d'après la loi probable du mouvement diurne circulaire et uniforme, de laquelle il résulte que

$$PA = PA'.$$

Or, si l'on calcule, par la trigonométrie sphérique, l'angle PZA et le côté AZ du triangle APZ, d'après les trois autres parties connues; on trouve généralement :

1°. Une valeur de cet angle qui s'accorde à peu près avec l'azimut observé;

2°. Une valeur de ce côté supérieure à la distance zénithale également observée.

En outre, on reconnaît que l'excès dont il s'agit, fort petit jusqu'à 45 degrés où il n'atteint pas 1 minute, croît avec la distance apparente au zénith, qu'il dépasse 30 minutes à l'horizon, et qu'il est à très-peu près le même pour toute étoile à la même distance zénithale, lorsque les circonstances météorologiques dans lesquelles on observe ne diffèrent pas beaucoup; ce qui éloigne l'idée que cette circonstance tienne à une irrégularité dans le mouvement circulaire apparent du ciel.

On sait d'ailleurs que la masse gazeuse qui entoure la Terre et

forme son atmosphere, présente des densités décroissantes à mesure que l'on s'éloigne de la surface, et que l'air sec ou mêlé de vapeur aqueuse, à des degrés de condensation différents, n'a pas le même pouvoir réfringent; d'où il suit que la trace, dans l'atmosphère, d'un rayon de lumière émis ou réfléchi par un astre semble devoir être une courbe concave vers le plan horizontal de l'observateur; ce qui s'accorde avec le résultat fourni par la combinaison de la loi si simple du mouvement circulaire et de l'observation, puisque cela aurait évidemment pour effet d'élever cet astre.

Le phénomène de la réfraction était connu des anciens astronomes, au moins depuis Ptolémée; mais ils ne pouvaient l'appliquer à l'explication de l'irrégularité dont il s'agit, faute d'idées justes sur la constitution de l'atmosphère, et parce que leurs instruments n'étaient pas assez précis pour qu'elle ne se confondît pas le plus souvent avec les erreurs d'observation. Parmi les modernes, Tycho-Brahé croyait encore que les réfractions étaient nulles pour les hauteurs apparentes plus grandes que 45 degrés; Dominique Cassini (auteur d'une Table de réfraction publiée en 1661) a le premier proposé une hypothèse au moyen de laquelle il les a calculées pour toute hauteur, et Newton a commencé (suivant M. Biot) à en fonder la véritable théorie vers la fin du XVIIe siècle.

Calcul de la force qui dévie la lumière quand elle traverse l'atmosphère.

2. La force qui dévie la lumière lorsqu'elle traverse un milieu dont la densité et même la composition peuvent varier d'un point à un autre, est de l'espèce des forces moléculaires; car on admet qu'elle décroît avec une excessive rapidité lorsque la distance augmente, et qu'elle devient insensible à de très- petites distances.

L'expression de cette force a d'abord été donnée par Kramp [*], puis ensuite par l'illustre auteur de la *Mécanique céleste* [**].

Ces deux géomètres supposent que la Terre est sphérique et entourée

[*] *Analyse des réfractions.*

[**] Chap. II, liv. X, tome IV.

d'une atmosphere formée de couches d'air également sphériques et concentriques à la Terre, dont la densité est une fonction de la hauteur à partir de sa surface. Ils ne tiennent pas compte de la vapeur aqueuse qui est mêlée à l'air en différentes proportions [*]; mais Laplace remarque que son équation différentielle de la réfraction peut toujours être employée, en y mettant *la force réfractive* au lieu de la densité, et il indique l'influence qu'une humidité extrême dans le lieu de l'observation peut avoir sur la réfraction calculée d'après ses formules.

Le raisonnement de Kramp me paraissant le plus direct, je vais l'exposer avec quelques modifications.

La lumière étant parvenue en m au sein de l'atmosphère, à la distance r du centre de la Terre; la force qui la dévie est dirigée suivant la droite mO menée de m à ce centre, pourvu seulement que l'atmosphère soit décomposable en couches sphériques d'égal pouvoir réfringent dans la partie où passe le rayon que l'on considère, et que ce pouvoir croisse quand on se rapproche de la surface de la Terre.

Soient yy' la trace sur un plan quelconque conduit suivant mO de la sphère de rayon r concentrique à la Terre; et $\gamma\rho$ la *force réfractive* de Laplace à la distance r, ρ étant la densité. Décrivons de m comme centre, avec les rayons z et $z + dz$, deux surfaces sphériques dont les traces sur le plan yOy' sont les circonférences AB et CD; partageons l'air compris entre elles par des surfaces sphériques concentriques à la Terre; et soient MM' et NN' les traces sur yOy' de deux de ces surfaces dont les rayons sont supérieurs ou inférieurs à r, de x et de $x + dx$.

L'action exercée en m sur la lumiere par l'air compris entre les quatre sphères AB, CD, MM' et NN', peut être considérée comme proportionnelle à son volume et à son pouvoir réfractif. Or, ce volume est exprimé par $2\pi z\,dz\,dx$, en négligeant un infiniment petit par rapport à ce produit; et ce pouvoir est exprimé par $\gamma\rho \pm \frac{d(\gamma\rho)}{dr}\,x$ [**], en né-

---

[*] M. Biot a beaucoup insiste sur cette circonstance dans son Memoire sur les réfractions lu à l'Institut en 1836.

[**] Je mets le double signe parce que je suppose x positif au dedans comme au dehors de la sphère yy'.

gligeant les puissances supérieures à la première de l'accroissement x de r, ce qui ne saurait produire une erreur sensible, puisque x ne peut surpasser le rayon extrêmement petit de la sphère d'action de l'air sur la lumière. Donc, si l'on observe que les droites menées de m aux molécules qui composent cette petite masse d'air, font avec mO des angles dont les cosinus sont sensiblement égaux à $\pm \frac{x}{z}$, et qu'on représente par $\varphi(z)$ une fonction très-rapidement décroissante lorsque z croît à partir de zéro, qui devienne nulle pour une valeur très-petite de z, on a

$$\pm 2\pi x\,dx \left[\gamma\rho \mp \frac{d(\gamma\rho)}{dr} x\right] \varphi(z)\,dz$$

pour l'action de cette partie, les signes supérieurs se rapportant au cas où elle est intérieure, et les autres à celui où elle est extérieure à la sphère yy'.

La somme des actions produites par deux parties correspondantes situées de part et d'autre de yy', est

$$-4\pi x^2\,dx \cdot \frac{d(\gamma\rho)}{dr} \cdot \varphi(z)\,dz;$$

et, pour avoir celle de l'air compris entre les spheres AB et CD, il suffirait d'intégrer, par rapport à x, depuis o jusqu'à $z + dz$; mais on peut substituer z à cette dernière limite, ce qui n'altérera le résultat que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même, de sorte que l'on a

$$-4\pi \cdot \frac{d(\gamma\rho)}{dr} \cdot \varphi(z) \cdot \frac{z^3}{3} \cdot dz.$$

Enfin, l'action totale de l'atmosphère sur la lumière parvenue en m, s'obtient en intégrant de nouveau, par rapport à z, depuis o jusqu'à z_1 (z_1 étant le rayon de la sphère d'action); ce qui donne

$$-2\,\mathrm{K} \cdot \frac{d(\gamma\rho)}{dr},$$

en posant

$$4\pi \int_0^{z_1} \varphi(z) \cdot \frac{z^3}{3}\,dz = 2\,\mathrm{K}:$$

mais, comme on admet que K varie très-lentement par rapport à r, on fait entrer cette quantité sous le signe de différentiation, et l'on prend

$$-2\frac{d(k\rho)}{dr},$$

en remplaçant $K\gamma$ par k; ce qui revient évidemment à ajouter à l'expression précédente, la quantité $-2\gamma\rho\frac{d.K}{dr}$, que l'on regarde comme relativement insensible.

Équation de la trajectoire lumineuse.

5. Cela posé, le principe des forces vives, qui est applicable au mouvement de la lumière, entendu ainsi, fournit

$$\frac{1}{2}d.v^2 = 2\frac{d(k\rho)}{dr}dr.$$

et, en intégrant depuis une valeur de r pour laquelle on ait $\rho = 0$ et $v = v_0$, il vient

$$v^2 = v_0^2 + 4k\rho.$$

Le principe des aires est aussi applicable, puisque ce mouvement est considéré comme produit par une force centrale, et l'on a

$$(1)\qquad \frac{r\sin\omega}{r_1\sin\omega_1} = \frac{\sqrt{1+4\frac{k\rho_1}{v_0^2}}}{\sqrt{1+4\frac{k\rho}{v_0^2}}}.$$

en désignant par ω et ω_1 les angles que les tangentes à la trajectoire lumineuse aux extrémités des rayons r et r_1 font avec ces rayons, car les distances $r\sin\omega$, $r_1\sin\omega_1$ du centre à ces tangentes sont, d'après un théorème connu, inversement proportionnelles aux vitesses correspondantes.

L'élimination de ω entre l'équation (1) et l'équation connue

$$(2)\qquad \tang\omega = r : \frac{dr}{d\varphi},$$

dans laquelle φ est l'angle du rayon variable r et du rayon fixe r_1 aboutissant au spectateur, donne

$$(3)\qquad d\varphi = \frac{r_1 \sin\omega_1 \sqrt{1 + 4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}} \cdot dr}{r^2 \sqrt{\left(1 + 4\frac{k\rho}{v_0^2}\right) - \frac{r_1^2 \sin^2\omega_1}{r^2}\left(1 + 4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}\right)}},$$

d'où se déduirait entre r et φ l'équation polaire de la trajectoire lumineuse, par une simple intégration de fonction d'une seule variable, si l'expression de $k\rho$ était connue en fonction de r.

Il n'est pas possible d'avoir cette expression, mais on peut du moins reconnaître que $4\frac{k\rho}{v_0^2}$ doit toujours être une petite fraction. En effet, on trouve facilement

$$\frac{r \sin\omega}{r_1 \sin\omega_1} = i,$$

en s'appuyant sur ce que l'indice de réfraction relatif au passage d'un milieu A_1 dans un autre A_n est le produit de ceux qui se rapportent aux passages successifs de A_1 dans A_2, de A_2 dans A_3,..., enfin de A_{n-1} dans A_n, et en désignant par i l'indice relatif au passage de la couche sphérique dont le moindre rayon est r dans celle où il est r_1; donc, on a, d'après l'équation (1),

$$(3\ bis)\qquad 4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2} = i_1^2 - 1,$$

i_1 étant l'indice relatif au passage du vide dans l'air doué du pouvoir réfringent $4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}$.

Cette équation donne, d'après les expériences de MM. Biot et Arago, $4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2} = 0.000588768$ environ pour de l'air sec, à la température 0 degré, sous la pression $0^m,76$; et, si l'on étend par induction à toute hauteur l'identité de composition de l'air constatée pour celles où l'on a pu s'élever jusqu'à présent, il résulte des mêmes expériences

que k est constant, quelle que soit la quantité proportionnelle de vapeur aqueuse mêlée à l'air, de sorte que $4\frac{k\rho}{v_0^2}$ est proportionnelle à la densité ρ. Donc, ce pouvoir est d'abord fort petit, puis décroît à mesure qu'on s'élève.

Enfin, même quand on n'admet pas l'identité de composition, il paraît infiniment probable que le pouvoir réfringent décroît encore, suivant une loi moins simple.

Il est utile de remarquer que, d'après cela, la dérivée $4\frac{d}{dr}\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right)$ est toujours négative, très-petite en valeur absolue, et décroissante; ce que l'on rend sensible, en se figurant la courbe dont les abscisses seraient les valeurs de r, et les ordonnées, celles de $4\frac{k\rho}{v_0^2}$ respectivement correspondantes.

Diverses formes de l'équation de la réfraction.

4. Ce qui importe, ce n'est pas de connaître la forme d'un rayon de lumière [*], mais bien la réfraction relative à un astre vu dans une certaine position, et il est permis de prendre pour cette réfraction, même lorsqu'il s'agit de la Lune, la somme des flexions que le rayon éprouve dans l'atmosphère, en négligeant le diamètre apparent de cette partie de la trajectoire vue de l'astre.

ζ représentant l'angle variable que la tangente à la trajectoire fait avec le prolongement du rayon r, il s'agit donc de calculer l'intégrale de $d\zeta$ depuis $r = r_1$ jusqu'à $r = r_2$, r_2 étant la valeur de r correspondante à la limite de l'atmosphère.

On peut déduire de la relation évidente

$$\zeta = \varphi + \omega, \tag{4}$$

de l'équation (1) et de l'équation (2), qui est préférable à l'équation (3) en raison de sa simplicité, plusieurs expressions de $d\theta$.

* Newton paraît s'y être attaché. (Mémoire de M. Biot.)

1°. On tire de l'équation (1)

$$\sin\omega\, dr + \cos\omega . r\, d\omega$$

$$= - r_1 \sin\omega_1 \sqrt{1 + 4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}} \cdot \frac{2\, d\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right)}{\left(1 + 4\frac{k\rho}{v_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = - \frac{2\, r \sin\omega\, d\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right)}{1 + 4\frac{k\rho}{v_0^2}},$$

de l'équation (2)

$$\sin\omega\, dr = \cos\omega . r\, d\varphi,$$

et de l'équation (4)

$$d\omega + d\varphi = d\theta;$$

donc on a

$$(5) \qquad d\theta = - \frac{2 \operatorname{tang}\omega\, d\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right)}{1 + 4\frac{k\rho}{v_0^2}},$$

puis, en remplaçant $\operatorname{tang}\omega$ par la valeur

$$\frac{\frac{r_1}{r}\sin\theta_1 \sqrt{1 + 4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}}{\sqrt{1 + 4\frac{k\rho}{v_0^2} - \frac{r_1^2}{r^2}\sin^2\theta_1\left(1 + 4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}\right)}},$$

qu'on tire de l'équation (1) en écrivant θ_1 au lieu de ω_1, puisque ces deux arcs sont égaux, il vient

$$(6) \qquad d\theta = - \frac{2 r_1 \sin\theta_1 \sqrt{1 + 4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}} \cdot d\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right)}{\left(1 + 4\frac{k\rho}{v_0^2}\right)\sqrt{r^2\left(1 + 4\frac{k\rho}{v_0^2}\right) - r_1^2 \sin^2\theta_1\left(1 + 4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}\right)}}.$$

les radicaux devant être pris positivement afin que $d\theta$ soit positive.

2°. Si l'on remplace dans l'équation (5) $\operatorname{tang}\omega$ par sa valeur (2), on a

$$(7) \qquad d\theta = - \frac{2\frac{d}{dr}\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right) \cdot r\, d\varphi}{1 + 4\frac{k\rho}{v_0^2}}.$$

qui se réduit à

$$(7\ bis)\qquad d\delta = -\frac{2\frac{k}{v_0^2}\cdot\frac{d\rho}{dr}\cdot 1\,d\varphi}{1+4\frac{k\rho}{v^2}}.$$

en supposant k constant, et qui, suivant M. Biot, a été employée par Newton.

3°. Enfin, si l'on remplace, dans l'expression (7), $d\varphi$ par sa valeur tirée de l'équation (4), on trouve encore

$$(8)\qquad d\delta = \frac{2r\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right)\cdot d\omega}{1+4\frac{k\rho}{v_0^2}+2r\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right)}$$

Intégration de l'équation (6). — Hauteurs apparentes supérieures à 10 degrés ou même à 15 degrés.

5. L'équation (6), ou du moins celle qu'on en déduit par le changement de k en k_1, se trouve intégrée dans la *Mécanique céleste*, par le développement en série. Le premier terme de la série ne dépend que de données relatives à la station de l'observateur, et il est démontré que les suivantes n'ont qu'une très-petite influence quand la distance zénithale δ_1 ne surpasse pas 78 degrés [*]. La brièveté de cette exposition ne me permet pas d'entrer ici dans le détail du calcul.

Voici, à peu de chose près, comment M. Biot a traité le même sujet.

Soit ω' la valeur de ω correspondante à

$$\omega_1 = \delta_1 = 90^\circ,$$

et qui varie seulement avec r. On a, d'après l'équation (1),

$$(8\ bis)\qquad \sin\omega' = \frac{r}{r'}\cdot\frac{\sqrt{1+4\frac{k\rho}{v^2}}}{\sqrt{1+4\frac{k\rho}{v_0^2}}}.$$

[*] Ce cas d'approximation avait été signalé par Oriani (*Éphémérides de Milan*, 1788).

de laquelle il résulte d'abord que $r\sqrt{1+4\frac{k\rho}{v_0^2}}$ croît avec r, bien que $4\frac{k\rho}{v^2}$ diminue en même temps, car l'observation exclut en général des trajectoires sinueuses, de sorte que ω' diminue constamment depuis 90 degrés. L'équation (1) se réduit à

$$\sin\omega = \sin\theta_1 \sin\omega',$$

et en chassant $\operatorname{tang}\omega$ de l'équation (5) au moyen de cette expression de $\sin\omega$, on a

$$d\theta = -\frac{2\operatorname{tang}\theta_1 . \sin\omega' . d\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right)}{\left(1+4\frac{k\rho}{v_0^2}\right)\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\theta_1\cos^2\omega'}}$$

que M. Biot met sous la forme

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} d\theta = &-\frac{2\operatorname{tang}\theta_1 . \sin\omega' . d\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right)}{1+4\frac{k\rho}{v_0^2}} \\ &+\frac{2\operatorname{tang}\theta_1 . \sin\omega' . \cos\omega' . d\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right)}{\left(1+4\frac{k\rho}{v_0^2}\right)\left(1+\operatorname{tang}^2\theta_1\cos^2\omega'+\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\theta_1\cos^2\omega'}\right)}\ [*]. \end{aligned}\right.$$

1°. Il pose alors

$$1-\frac{1}{\sqrt{1+4\frac{k\rho}{v_0^2}}} = 2z.$$

---

[*] On y est conduit lorsqu'on essaye de décomposer le coefficient de $d\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right)$ en une somme de deux fractions, dont l'une soit rationnelle; si l'on égale pour cela ce coefficient à

$$-\frac{2\operatorname{tang}\theta_1\sin\omega'}{1+4\frac{k\rho}{v_0^2}}+\frac{A}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\theta\cos^2\omega'}}:$$

on tire effectivement de cette égalité

$$A = \frac{2\operatorname{tang}\theta_1\sin\omega'}{1+4\frac{k\rho}{v_0^2}}\left(\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\theta_1\cos^2\omega'}-1\right).$$

de sorte que le premier terme de cette expression de $d\varsigma$ devient

$$-2\tang\varsigma_1\sqrt{1+4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}\cdot\frac{r_1\,dz}{r},$$

en vertu de l'équation (8 *bis*); et l'intégrale de ce premier terme, prise depuis $\rho=\rho_1$ jusqu'à $\rho=0$, se ramène, au moyen de l'intégration par parties, à

$$\tang\varsigma_1\left[\sqrt{1+4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}\left(1+\frac{l}{r_1}\int_{\rho_1}^{0}\frac{4\frac{k}{v_0^2}\cdot\rho_1\cdot\frac{dp}{p_1}}{1+4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}+\sqrt{1+4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}}\right)-1\right]$$

en remplaçant $\frac{r_1\,dr}{r^2}$ par sa valeur $-\frac{l}{r_1}\cdot\frac{\rho_1}{\rho}\cdot\frac{dp}{p_1}$, déduite de l'équation d'équilibre des couches de l'atmosphère, qui est

$$dp=-g\frac{r_1^2}{r^2}\rho\,dr,$$

et de

$$p_1=g\rho_1 l.$$

L'intégrale non encore effectuée tombe évidemment entre

$$\int_{\rho_1}^{0}2\frac{k}{v_0^2}\cdot\rho_1\cdot\frac{dp}{p_1}=-2\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}\cdot\text{moy}\left(\frac{k}{k_1}\right)\cdots\text{(limite inférieure)}$$

et

$$\frac{4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}{1+4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}+\sqrt{1+4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}}\int_{\rho_1}^{0}\frac{k}{k}\frac{dp}{p_1}$$

$$=-\frac{4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}{1+4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}+\sqrt{1+4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}}\cdot\text{moy}\left(\frac{k}{k_1}\right)\cdots\text{(limite supérieure)};$$

donc, celle du premier terme dont il s'agit est comprise entre

$$\tang\varsigma_1\left\{\sqrt{1+4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}\left[1-\frac{4\frac{l}{r_1}\cdot\frac{k_1\rho}{v_0^2}\cdot\text{moy}\left(\frac{k}{k_1}\right)}{1+4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}+\sqrt{1+4\frac{k_1\rho}{v_0^2}}}\right]-1\right\}$$

$$=R'_1\tang\varsigma_1\ldots\text{(limite supérieure)}.$$

et

$$\operatorname{tang}\theta_1\left\{\sqrt{1+4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}\left[1-2\frac{l}{r_1}\cdot\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}\operatorname{moy}\left(\frac{k}{k_1}\right)\right]-1\right\}$$
$$=R_1\operatorname{tang}\theta_1\ldots(\text{limite inférieure}).$$

2°. Le facteur

$$\frac{2\operatorname{tang}^3\theta_1.\sin\omega'}{\left(1+4\frac{k\rho}{v_0^2}\right)\left(1+\operatorname{tang}^2\theta_1\cos^2\omega'+\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\theta_1\cos^2\omega'}\right)}$$

du second terme de l'expression (9) de $d\theta$ tombe entre $\operatorname{tang}^3\theta_1$ (limite supérieure), et

$$\frac{2\operatorname{tang}^3\theta_1.\sin\omega'_2}{\left(1+4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}\right)\left(1+\operatorname{tang}^2\theta_1.\cos^2\omega'_2+\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\theta_1\cos^2\omega'_2}\right)}\ (\text{limite inférieure}),$$

ω_2 étant la valeur de ω' qui répond à $\rho=0$; car ω' décroît depuis $\frac{\pi}{2}$. L'intégrale de ce terme, prise depuis $\rho=\rho_1$ jusqu'à $\rho=0$, est donc le produit de $\int_{\rho_1}^{0}\cos^2\omega'.d\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right)$ par une quantité comprise entre ces deux limites.

Or on a

$$\cos^2\omega'=1-\frac{r_1^2}{r^2}\frac{1+4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}{1+4\frac{k\rho}{v_0^2}},$$

d'après l'équation (8 *bis*), et, par conséquent,

$$\cos^2\omega'<2\left(1-\frac{r_1}{r}\right)-\frac{r_1^2}{r_2^2}\frac{4\left(\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}-\frac{k\rho}{v_0^2}\right)}{1+4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}},$$

et

$$>\left(1+\frac{r_1}{r_2}\right)\left(1-\frac{r_1}{r}\right)-4\left(\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}-\frac{k\rho}{v_0^2}\right),$$

r_2 désignant la valeur de r correspondante à $\rho=0$; puis l'intégration par parties donne

$$\int_{\rho_1}^{0}\frac{r_1}{r}\cdot d\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right)=-\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}\left[1-\frac{l}{r_1}\cdot\operatorname{moy}\left(\frac{k}{k_1}\right)\right],$$

en remplaçant $\frac{r_1 dr}{r^2}$ par la valeur déjà employée dans le calcul précédent. Donc, eu égard aux signes, il vient

$$\int_{\rho_1}^{0} \cos^2 . \omega' . d\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right) > -2\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}\left[\frac{l}{r_1} \cdot \text{moy}\left(\frac{k}{k_1}\right) - \frac{r_1^2}{r_2^2}\frac{\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}{1+4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}\right]$$

et

$$< -2\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{r_1}{r_2}\right)\frac{l}{r_1}\,\text{moy}\left(\frac{k}{k_1}\right) - \frac{k_1\rho}{v_0^2}\right]:$$

de sorte qu'en multipliant respectivement les seconds membres de ces inégalités par la limite supérieure et par la limite inférieure du coefficient de $\int_{\rho_1}^{0} \cos^2 \omega' . d\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right)$, on a

$$-2\,\text{tang}^3\,\theta_1 \cdot \frac{k_1\rho_1}{v_0^2}\left[\frac{l}{r_1} \cdot \text{moy}\left(\frac{k}{k_1}\right) - \frac{r_1^2}{r_2^2}\frac{\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}{1+4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}\right] = -\,R_2\,\text{tang}^3\,\theta_1,$$

et

$$-\frac{4\,\text{tang}^2\,\theta_1 . \sin\omega'_2 \cdot \frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}{\left(1+4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}\right)\left(1+\text{tang}^2\theta_1\cos^2\omega'_2+\sqrt{1+\text{tang}^2\theta_1\cos^2\omega'_2}\right)}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{r_1}{r_2}\right)\frac{l}{r_1}\cdot\text{moy}\left(\frac{k}{k_1}\right)-\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}\right] = -\,R_2\,\text{tang}\,\theta_1,$$

pour deux limites, la première inférieure et la seconde supérieure, de l'intégrale du terme dont il s'agit.

3°. D'après cela,

$$R_{\theta_1} > R_1\,\text{tang}\,\theta_1 - R_2\,\text{tang}^3\,\theta_1 \quad \text{et} \quad R_{\theta_1} < R'_1\,\text{tang}\,\theta_1 - R_2\,\text{tang}^3\,\theta_1,$$

et l'on prendra

$$(10) \qquad R_{\theta_1} = \frac{R_1 + R'_1}{2}\,\text{tang}\,\theta_1 - \frac{R_2 + R'_2}{2}\,\text{tang}^3\,\theta_1,$$

afin d'avoir une erreur moindre que la demi-différence des seconds membres des inégalités précédentes.

Pour traduire cette formule en nombres, on remplace moy $\left(\frac{k}{k_1}\right)$ par 1, ce qui revient à supposer invariable le coefficient k, et n'est d'une exac-

titude bien constatée que pour les hauteurs jusqu'auxquelles on a pu s'élever; mais l'erreur provenant de cette substitution dans les calculs de R_1, R_2, R'_1 et R'_2 est certainement très-atténuée, s'il y en a une, par la petitesse relative des facteurs qui multiplient la moyenne de $\frac{k}{k_1}$ qu'il faudrait prendre si k était variable.

On détermine $\frac{k_1 \rho_1}{\omega_0^2}$ par l'équation (3 *bis*), à l'aide d'une Table d'indices de réfraction, en tenant compte des indications météorologiques recueillies au moment où l'on a observé la distance apparente.

On prend pour l la valeur qui se déduit de $p_1 = g\rho_1 l$ d'après ces indications, en remplaçant g par la valeur de la gravité au lieu de l'observation; et pour r_2 la valeur de Delambre, qui est la plus généralement admise.

Enfin, l'angle ω'_2 se déduira de la formule (8 *bis*) en y faisant $\rho = 0$, $r = r_2$ et $\frac{r_2}{r_1} = 1,01122$.

M. Biot a trouvé ainsi qu'à la température 10 degrés et sous la pression $0^m,762$ la limite d'erreur

$$\frac{R'_1 - R_1}{2} \operatorname{tang} \theta_1 + \frac{R_2 - R'_2}{2} \operatorname{tang}^3 \theta_1$$

était inférieure à $0'',3$ jusqu'à 74 degrés de distance au zénith, et qu'elle devenait supérieure à 2 secondes vers 80 degrés.

Il a constaté d'ailleurs une concordance assez parfaite entre quelques réfractions, calculées d'après la formule (10), et les réfractions correspondantes, prises dans la Table de M. Ivory, ou dans celle qui est publiée par le Bureau des Longitudes [*].

Intégration de l'équation (8). — *Règle de Bradley.* — *Quadratures.*

6. D'après les remarques qui terminent l'article **3**, le coefficient de $d\omega$ dans l'équation (8) est renfermé dans des limites assez étroites pour que, si l'on désigne par $\frac{1}{2n}$ une moyenne convenable de ce coefficient, on ait

$$R_{\theta_1} = -\frac{1}{2n}\int_{\rho_1}^{0} d\omega = \frac{1}{2n}\int_{0}^{\rho_1} d\omega,$$

[*] Elle a été calculée par MM. Bouvard et Arago, d'après les formules de Laplace.

avec une assez grande approximation; or, on tire de l'équation (1),

$$\omega = \text{arc sin}\left[\frac{r_1}{r}\frac{\sqrt{1+4\frac{k_1\rho}{c_1^2}}}{\sqrt{1+4\frac{k\rho}{c_0^2}}}\cdot\sin\zeta_1\right];$$

donc il vient

$$R_{\zeta_1} = \frac{1}{2n}\left[\zeta_1 - \text{arc sin}\left(\frac{r_1}{r}\sqrt{1+4\frac{k_1\rho}{c_1^2}}\cdot\sin\zeta_1\right)\right],$$

d'où

$$m\sin\zeta_1 = \sin(\zeta_1 - 2nR_{\zeta_1}),$$

en représentant $\frac{r_1}{r}\sqrt{1+4\frac{k_1\rho}{c_1^2}}$ par m; et l'on tire de là, par un calcul facile,

$$(11)\qquad \text{tang}.\,nR_{\zeta_1} = \frac{1-m}{1+m}\,\text{tang}(\zeta_1 - nR_{\zeta_1}),$$

puis l'équation du deuxième degré

$$\text{tang}^2.\,nR_{\zeta_1} + \frac{2}{(1+m)\,\text{tang}\,\zeta}\cdot\text{tang}.\,nR_{\zeta_1} - \frac{1-m}{1-m} = 0,$$

dont les racines sont réelles et de signes contraires, car $\frac{1-m}{1+m} > 0$. Celle qui est positive et qui répond seule à la question, donne

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \text{tang}.\,nR_{\zeta_1} &= \frac{1-m}{2}\,\text{tang}\,\zeta_1 - \frac{(1-m^2)(1-m)}{8}\,\text{tang}^3\,\zeta_1 \\ &+ \frac{(1-m)(1-m)}{16}\,\text{tang}^5\,\zeta_1 - \ldots; \end{aligned}\right.$$

et il est assez remarquable que les deux premiers termes de cette série soient précisément de même forme que ceux de la valeur (10) de R_{ζ_1}. En remplaçant $\text{tang}\,nR_{\zeta_1}$ par l'arc, on a l'expression indiquée dans l'*Astronomie théorique et pratique* (vol. I, chap. XIII, n° 25).

Le coefficient, dont la moyenne valeur convenable a été représentée par $-\frac{1}{2n}$, ne dépend pas de ζ_1, de sorte que n doit conserver la même valeur pour toute distance apparente au zénith, et, d'ailleurs,

m est dans le même cas; donc il est possible de déterminer n et m par un certain nombre d'observations, et ensuite l'une des formules (11) ou (12) fournira une valeur approchée de R_{θ_1}. Je reviendrai sur ce sujet à la fin de cette Thèse.

L'équation (11) renferme la règle de Bradley; car si l'on y remplace $\tang nR_{\theta_1}$ par nR_{θ_1}, ce qui ne peut entraîner qu'une légère erreur lorsque nR_{θ_1} est un arc assez petit, on en déduit que

« *Dans un même état de l'air, les réfractions à diverses distances* » *apparentes du zénith sont proportionnelles aux tangentes de ces* » *distances, diminuées du produit de la réfraction par un coefficient constant* [*]. »

Cet astronome y a été conduit par une voie bien différente : « Halley, » dit M. Biot [**], ayant remarqué, d'après la Table qu'il publia, » en 1721, sous le nom de Newton, que, pour des distances zénithales » apparentes peu considérables, les réfractions étaient à peu près pro- » portionnelles aux tangentes de ces distances; Bradley eut l'heureuse » idée d'introduire, sous la caractéristique tang, un multiple des » réfractions, et de le déterminer de manière à pouvoir tirer de la » formule celles que des observations très-précises lui indiquaient. »

Des formules qui offrent une grande analogie avec l'équation (11) ont été obtenues de différentes manières par plusieurs astronomes, soit en supposant une atmosphère de densité moyenne, comme Cassini, soit un pouvoir réfringent constant [***]; et Laplace a fait sortir cette équation d'une hypothèse purement analytique, en remarquant que son équation différentielle de la réfraction (différant seulement de l'équation (6) par la substitution de k_1 à k) deviendrait intégrable si l'on avait

$$\frac{r'}{r} = \left(\frac{1 + 4\frac{k_1 \rho}{v^2}}{1 + 4\frac{k_1 \rho}{v'^2}}\right)^{m'}$$

m' étant une constante.

---

[*] *Astronomie physique* de M. Biot.

[**] *Astronomie physique* de M. Biot.

[***] *Astronomie théorique et pratique* de Delambre.

Or, Newton avait finalement adopté une constitution atmosphérique d'après laquelle la température ne varierait pas avec la hauteur, et l'hypothèse de Laplace conduit (n° **7**) à des températures décroissantes en progression arithmétique pour des élévations équidifférentes, ce qui ne paraît pas moins inadmissible que l'hypothèse de Cassini, ou que celle qui lui a succédé.

En conséquence, l'exactitude relative de la règle de Bradley, employée pour construire la Table de Lalande, et dont on se sert encore aujourd'hui pour des observations de premier ordre, semblerait être un fait singulier, si l'on ne voyait qu'on y parvient sans supposer telle ou telle constitution atmosphérique.

Elle tombe, du reste, en défaut pour des distances zénithales considérables.

M. Biot, dans la troisième partie de son remarquable Mémoire sur les réfractions, a montré que l'on peut obtenir, avec un degré suffisant d'approximation, celles qui répondent à toute distance zénithale, en se servant de l'équation (8), et après avoir adopté une constitution atmosphérique particulière, comme l'ont fait tous ceux qui ont traité le problème, du moins pour les grandes distances. Pour cela, il faut prendre un certain nombre de valeurs de $\frac{k\rho}{v_0^2}$ échelonnées depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à $0{,}01 \cdot \frac{k_1\rho}{v}$ par exemple, puis calculer les valeurs de r correspondantes, d'après les équations qui expriment la constitution atmosphérique admise, celles de ω', d'après la formule (8 *bis*), ou mieux, d'après

$$\operatorname{cotang}^2\omega' = \frac{r^2 - r_1^2}{r_1^2} - \frac{r}{r_1}\,\frac{i\left(\frac{k\rho}{v_0^2} - \frac{k\rho}{v_1^2}\right)}{1 + i\frac{k\rho}{v^2}}$$

que l'on en tire facilement; et celles de ω, d'après les équations (1) et (8 *bis*) qui donnent

$$\operatorname{cotang}^2\omega = \frac{\operatorname{cotang}^2\omega'}{\sin^2\varphi} - \operatorname{cotang}^2\varphi_1.$$

Ensuite, si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, sont les valeurs de $\frac{k\rho}{v_0^2}$ que l'on a prises premièrement, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ celles de ω qu'on a obtenues comme

il vient d'être indiqué, et Ω_1, Ω_2, Ω_3,..., celles que l'on trouve pour le coefficient de $d\omega$ dans l'équation (8), en faisant $\frac{d}{dr}\left(\frac{k\rho}{v_0^2}\right)$ égal à $\alpha_2 - \alpha_1$ pour avoir Ω_1, à $\alpha_3 - \alpha_2$ pour avoir Ω_2, etc., on pose

$$\Omega = \Omega_1 + A(\omega - \omega_1) + B(\omega - \omega_1)^2,$$

A et B étant déterminés par les conditions que $\Omega = \Omega_2$ puis $\Omega = \Omega_3$ pour $\omega = \omega_2$ et $\omega = \omega_3$, et l'on tire de là, en intégrant,

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_3} \Omega\, d\omega = \Omega_1(\omega_3 - \omega_1) + \frac{1}{2} A(\omega_3 - \omega_1)^2 + \frac{1}{3} B(\omega_3 - \omega_1)^3$$

pour la partie de la réfraction R_{θ_1} correspondante au passage de la lumière de la couche où $\frac{k\rho}{v_0^2} = \alpha_3$ à celle où se trouve l'observateur.

Par ce procédé, M. Biot a trouvé une valeur de la réfraction horizontale inférieure de moins que 1″,3 à celle qui a été donnée par M. Ivory, d'après une constitution atmosphérique hypothétique dont je parlerai dans l'article suivant; et cette différence est peu sensible, eu égard à la grandeur de cette réfraction, qui dépasse 34 minutes.

Des hauteurs apparentes, inférieures à 15 degrés. — Formule empirique de Laplace.

7. L'illustre auteur de la *Mécanique céleste* est parvenu à une formule empirique pour les distances zénithales considérables, en s'appuyant sur des considérations que je vais exposer succinctement.

1°. Si l'on admet que la densité de l'air soit constante dans l'atmosphère entière, et qu'elle varie seulement à sa limite, l'équation (6), dans laquelle on ferait $k = k_1$, s'intègre facilement, et l'on déduit de l'intégrale une valeur de $R_{\frac{\pi}{2}}$, trop petite de plus que ses 0.5 par rapport à celle qui résulte des observations astronomiques.

Cette hypothèse revient à celle de Cassini.

2°. La supposition d'une température constante se confond avec celle de la pression proportionnelle à la densité à laquelle Newton avait

fini par s'arrêter, comme je l'ai déjà indiqué, et d'après laquelle il a calculé la Table publiée par Halley [*].

Il en résulte des densités décroissantes à très-peu près en progression par quotient pour des élévations équidifférentes. Car en joignant

$$p = p_1 \frac{\rho}{\rho_1},$$

que l'on a seulement avec une température constante, aux équations

$$dp = -g\frac{r_1^2}{r^2}\rho\, dr, \quad \text{et} \quad p_1 = g\rho_1 l,$$

que l'on a toujours, on trouve facilement

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{r_1}{l}.d\left(\frac{r_1}{r}\right),$$

d'où, en intégrant,

$$\log\left(\frac{\rho}{C}\right) = \frac{r_1^2}{lr} = \frac{r - 2\varepsilon}{l} + \frac{\varepsilon^2}{lr}.$$

C désignant une constante et ε l'élévation toujours assez petite relativement à r; de sorte que, abstraction faite de la fraction $\frac{\varepsilon}{lr}$, cette équation fournit bien des valeurs de ρ décroissantes en progression par quotient lorsque ε et r croissent par degrés égaux, et que, par suite, $r - 2\varepsilon$ décroît de la même manière.

Pour que $\rho = \rho_1$ réponde à $r = r_1$, il faut prendre $C = \rho_1 e^{-\frac{r_1}{l}}$, et en posant

$$1 - \frac{r_1}{r} = s,$$

on a

$$(12\ bis) \qquad \rho = \rho_1 e^{-\frac{r_1 s}{l}}.$$

Après avoir remplacé ρ par cette valeur dans l'équation (6), où il écrit k_1 au lieu de k, Laplace ramène, par divers développements en série, la détermination approchée de l'intégrale de cette équation à

[*] On ne connaissait pas bien à l'époque de Newton les lois de la dilatation des gaz, de sorte que cette coïncidence lui a échappé.

celle de l'intégrale définie $\int_0^T e^{-t^2}\,dt$, T étant une quantite qui devient infinie pour $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, et il parvient à une valeur de $R_{\frac{\pi}{2}}$ trop forte de plus que ses 0,12; d'où il conclut, par comparaison avec le résultat déduit de la supposition d'une densité constante, que la densité décroît, en réalité, moins rapidement que ne l'indique la formule (12 *bis*).

3°. L'équation (6) de cette Thèse devient intégrable, sous forme finie, comme celle de la *Mécanique céleste*, qui lui est analogue, par l'hypothèse

$$(13)\qquad \frac{r}{r} = \left(\frac{1 + 4\frac{k\rho}{v_0^2}}{1 + 4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}\right)^m,$$

peu différente de celle que j'ai rappelée au n° 5.

Elle se réduit effectivement, d'après cela, à

$$(14)\qquad d\theta = -\frac{dz}{(2m'-1)\sqrt{1-z^2}};$$

si l'on pose

$$\left(\frac{1 + 4\frac{k\rho}{v_0^2}}{1 + 4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}\right)^{m'-\frac{1}{2}} = \frac{z}{\sin\theta_1}.$$

En intégrant l'équation (14) depuis $z = \sin\theta_1$ qui répond à $\rho = \rho_1$ jusqu'à $z = \frac{\sin\theta}{\left(1 + 4\frac{k_1\rho}{v_0^2}\right)^{m'-\frac{1}{2}}}$ qui répond à $\rho = 0$, on a

$$(15)\qquad R_{\theta_1} = \frac{1}{2m'-1}\left\{\theta_1 - \arcsin\left[\frac{\sin\theta_1}{\left(1 + 4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}\right)^{m'-\frac{1}{2}}}\right]\right\};$$

d'où l'on tire l'équation déjà obtenue

$$m\sin\theta_1 = \sin(\theta_1 - 2nR_{\theta_1}),$$

en posant encore

$$2m' - 1 = 2n, \quad \text{et} \quad \left(1 + 4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}\right)^{m' - \frac{1}{2}} = \frac{1}{m},$$

et, conséquemment, l'hypothèse dont il s'agit conduit à la règle de Bradley, en partant de la formule (6).

L'équation (13) conduit à trois conséquences qui caractérisent la constitution atmosphérique correspondante. Si l'on remplace $\frac{r_1}{r}$ par la valeur qu'elle fournit, dans l'équation d'équilibre de l'atmosphère mise sous la forme

$$\frac{dp}{p_1} = \frac{r_1}{l} \cdot \frac{\rho}{\rho_1} \cdot d\left(\frac{r_1}{r}\right),$$

puis qu'on développe, en négligeant les puissances et les produits de $\frac{k_1\rho}{v_0^2}$ et de $\frac{k\rho}{v_0^2}$, on obtient

$$(16) \qquad \frac{p}{p_1} = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}$$

après avoir intégré de manière que $\rho = 0$ donne $p = 0$, et déterminé m' par la condition que $\rho = \rho_1$ donne $p = p_1$, ce qui exige que

$$\frac{r}{l} \cdot 2\frac{k_1\rho_1}{v_0^2} m' = 1;$$

donc *la pression serait proportionnelle au carré de la densité*. Si l'on différentie l'égalité (16), et qu'on élimine $\frac{dp}{p_1}$ au moyen de l'équation d'équilibre, il vient

$$d\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right) = \frac{r_1}{2l} \cdot d\left(\frac{r_1}{r}\right),$$

puis, en intégrant de manière que $\rho = \rho_1$ réponde à $r = r_1$,

$$\frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1} = \frac{r_1}{2l} \cdot \frac{r - r_1}{r},$$

et l'on a, en remplaçant r par r_1 dans le dénominateur,

$$(16\ bis) \qquad \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1} = \frac{r - r}{2l},$$

d'après laquelle *la densité décroîtrait en progression arithmétique pour des élévations équidifférentes*. Enfin, de l'équation connue

$$\frac{p\rho_1}{p_1\rho} = \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_1},$$

dans laquelle α est le coefficient de dilatation de l'air, et qui suppose la tension de la vapeur aqueuse nulle ou proportionnelle à la pression; t et t_1 étant d'ailleurs les températures correspondantes aux densités ρ et ρ_1, on tire, d'après les équations précédentes,

$$t = t_1 - \frac{r_1 - r}{2l} \cdot \frac{1 + \alpha t_1}{\alpha}, \tag{17}$$

de laquelle il résulte *que la température suivrait la même loi que la densité*.

La loi donnée par l'équation (16) est infirmée par l'observation : l'équation (16 *bis*) fournit

$$r - r_1 = 2l = 16500 \text{ mètres} \quad \text{pour} \quad \rho = 0,$$

tandis que la hauteur de l'atmosphère est certainement plus que quadruple; et l'équation (17) indique une élévation de 59 mètres seulement à partir de la surface de la terre, en supposant $t_1 = 10$ degrés, comme correspondante à un abaissement de température de 1 degré, tandis que l'observation en indique une à peu près triple. En outre, l'équation de condition

$$\frac{r}{l} \cdot 2\frac{k_1\rho_1}{v_0^2} \cdot m' = 1,$$

et

$$n = m' - \frac{1}{2},$$

donnent pour n le nombre 3,89, et il en résulte une valeur de la réfraction horizontale trop petite de plus que ses 0,15.

4°. Les deux modes de décroissement de la densité résultant des formules (12 *bis*) et (16 *bis*) ayant donné deux valeurs de la réfraction horizontale, l'une trop forte et l'autre trop faible, on est conduit à essayer un mode de décroissement mixte, k étant remplacé par k_1 dans

l'équation (6), elle devient d'abord

$$d\theta = -\frac{(1-s).\sin\theta_1.\beta.d\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)}{\left[1-2\beta\left(1-\frac{\rho}{\rho_1}\right)\right]\sqrt{\cos^2\theta_1 - 2\beta\left(1-\frac{\rho}{\rho_1}\right)+s(2-s)\sin\theta}}.$$

en posant comme précédemment

$$1-\frac{r_1}{r}=s,$$

et, de plus,

$$\frac{2\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}{1+4\frac{k_1\rho_1}{v_0^2}}=\beta;$$

puis

$$(6\ bis)\qquad d\theta = -\frac{\sin\theta_1.\beta.d\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)}{(1-\beta)\sqrt{\cos^2\theta_1 - 2\beta\left(1-\frac{\rho}{\rho_1}\right)+2s}},$$

en remplaçant $1-2\beta\left(1-\frac{\rho}{\rho_1}\right)$ par la moyenne arithmétique de ses valeurs extrêmes, et en négligeant respectivement s, s^2 et $-2s\cos^2\theta_1$ par rapport à 1, s et $\cos^2\theta_1$.

Laplace fait

$$(18)\qquad s-\beta\left(1-\frac{\rho}{\rho_1}\right)=u \quad\text{et}\quad \rho=\rho_1\left(1+\frac{fu}{f'}\right)e^{\frac{u}{f'}},$$

ce qui ramène l'équation (6 *bis*) à

$$d\theta = \frac{\frac{\beta}{f'}\cdot\sin\theta_1.\left(1-f+\frac{fu}{f'}\right)e^{-\frac{u}{f'}}du}{(1-\beta)\sqrt{\cos^2\theta_1+2u}},$$

et en posant encore

$$\cos^2\theta_1+2u=2f't^2,$$

il obtient enfin

$$d\theta=\frac{\beta\sin\theta_1}{1-\beta}\sqrt{\frac{2}{f'}}\cdot\left(1-f-\frac{f\cos\theta_1}{2f'}+ft^2\right)e^{\frac{\cos^2\theta_1}{2f'}-t^2}dt,$$

dont l'intégrale prise depuis $u = 0$ qui répond à $\rho = \rho_1$, jusqu'à $u = \infty$ qui répond à $\rho = 0$, est

$$(19) \qquad R_{\theta_1} = \frac{\beta \sin \theta_1}{1-\beta} \sqrt{\frac{2}{f'}} \left(1 - \frac{1}{2} f - f t_1^2\right) \cdot \Psi(t_1) + \frac{\beta f \sin 2\theta_1}{4(1-\beta) f'};$$

en posant

$$\frac{\cos \theta_1}{\sqrt{2f'}} = t_1, \quad \text{et} \quad \int_{t_1}^{\infty} e^{-t^2} dt = e^{-t_1^2} \Psi(t_1).$$

La valeur de R_{θ_1} ne dépend plus, d'après cela, que d'une simple quadrature; mais il faut déterminer les deux paramètres f et f' qui ont été introduits, au moyen de

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\beta}{1-\beta} \sqrt{\frac{\pi}{2f'}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} f\right),$$

et d'une autre équation que l'on trouve en combinant les équations (18) avec celle de l'équilibre, ce qui donne

$$(20) \qquad \frac{p}{p_1} = \frac{r_1}{l} \left\{ \frac{\beta}{2} \cdot \frac{\rho^2}{\rho_1^2} + [f'(1+f) + fu] e^{-\frac{u}{f'}} \right\},$$

puis, comme $p = p_1$ doit répondre à $\rho = \rho_1$ et $u = 0$,

$$\frac{l}{r_1} = \frac{\beta}{2} + f'(1+f).$$

Les valeurs de f et f' étant ainsi fixées, les équations (19), (20) et $\frac{1+\alpha t}{1+\alpha t_1} = \frac{p \rho_1}{p_1 \rho}$, en fournissent pour R_{θ_1}, p et t, qui s'accordent d'une manière satisfaisante avec les observations astronomiques et autres, et avec les conséquences de la loi du mouvement diurne.

Autre manière de parvenir à une formule empirique de la réfraction.

8. Les deux constitutions hypothétiques entre lesquelles on est conduit à penser que la constitution réelle de l'atmosphère se trouve comprise correspondant, l'une à des pressions proportionnelles aux densités, et l'autre à des pressions proportionnelles aux carrés des

densités, il semble rationnel de poser

$$p = m_1 \rho + m_2 \rho^2, \tag{21}$$

dans laquelle m_1 et m_2 sont des parametres qui doivent satisfaire à

$$p_1 = m_1 \rho_1 + m_2 \rho_1^2, \tag{22}$$

et a une seconde équation de condition que M. Biot présente sous la forme

$$p_1 \mu = m_1 \rho_1 + 2 m_2 \rho_1^2, \tag{23}$$

μ étant un coefficient variable d'un lieu à un autre, et, dans un meme lieu, avec le temps, qui dépend de l'état météorologique à la station de l'observateur, et même de cet état à une certaine hauteur [*]. D'après les équations (22) et (23), on a

$$m_1 = \frac{p_1}{\rho_1}(2 - \mu), \qquad m_2 = \frac{p_1}{\rho_1^2}(\mu - 1). \tag{24}$$

On tire de l'équation (21),

$$dp = (m_1 + 2 m_2 \rho) d\rho,$$

et l'élimination de dp, entre cette équation et celle de l'équilibre, donne

$$(m_1 + 2 m_2 \rho) \frac{d\rho}{\rho} + g \frac{r_1^2 dr}{r^2} = 0,$$

dont l'intégrale, prise de maniere que $\rho = \rho_1$ réponde à $r = r_1$, est

$$m_1 . \log\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right) + 2 m_2 (\rho_1 - \rho) - g \frac{r_1 (r - r_1)}{r} = 0. \tag{25}$$

Le logarithme népérien contenu dans cette équation conduit à faire

$$\rho = \rho_1 e^{-u}; \tag{26}$$

alors l'équation (21) devient

$$\frac{p}{p_1} = (2 - \mu) e^{-u} + (\mu - 1) e^{-2u}, \tag{21 bis}$$

[*] Memoire déjà cité; M. Ivory a pris moyennement $\mu = \frac{5}{4}$.

et l'équation (25) donne

$$(25\ bis)\qquad \frac{r}{r_1} = 1 - \frac{l}{r_1}\left[(2-\mu)u + 2(\mu-1)(1-e^{-u})\right]$$

d'après l'équation (24), en remplaçant $\frac{p_1}{g\rho_1}$ par l.

Enfin on prend, comme à la page 396,

$$(27)\qquad \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t_1} = \frac{p\rho_1}{p_1\rho},$$

pour déterminer la température à une hauteur quelconque, en faisant abstraction de la vapeur aqueuse contenue dans l'air, ou en supposant sa force élastique proportionnelle à celle du mélange, ce qui revient au même.

La substitution des expressions de $\frac{\rho}{\rho_1}$ et de $s = 1 - \frac{r_1}{r}$, qui se déduisent des équations (26) et (25 *bis*), dans l'équation (6 *bis*), fournit

$$(28)\qquad d\zeta = \frac{\beta \sin\theta_1}{1-\beta}\cdot\frac{e^{-u}du}{\sqrt{\cos^2\theta_1 + A^2 + Bu - Ae^{-u}}},$$

en posant

$$\frac{4l}{r_1}(\mu-1)^2 - 2\beta = A$$

et

$$\frac{2l}{r_1}(2-\mu) = B\ [*];$$

et, pour avoir la refraction, il faut intégrer cette valeur de $d\zeta$ depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \infty$, ce que M. Ivory a fait par un procédé particulier. Un calcul semblable à celui qui se trouve développé dans la *Mecanique céleste*, pour une intégration analogue que j'ai dû me

---

[*] $A = 0,0006682$, $B = 0,0018847$ et $\frac{A}{B} = 0,35454$ environ,

en prenant

$$\mu = \frac{5}{4},\quad l = 8000^{m},$$

et en calculant 2β d'après

$$2\beta = \frac{4\frac{k_1\rho_1}{e_0^2}}{1+4\frac{k_1\rho_1}{e_0^2}}.$$

contenter de citer au commencement du n° 4, donne

$$(29)\quad R_{\theta_1} = \frac{2e^{\frac{A}{B}}}{\sqrt{B}}\left\{\Phi_1 - \Phi_2 \cdot \frac{A}{B}\, 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{A}{B}} + \frac{1}{2}\Phi_3 \cdot \left(\frac{A}{B}\right)^2 \cdot 3^{\frac{3}{2}} \cdot e^{\frac{2A}{B}} - \frac{1}{2.3}\Phi_4 \cdot \left(\frac{A}{B}\right)^3 \cdot 4^{\frac{5}{2}} \cdot e^{\frac{3A}{B}} + \ldots\right\}\frac{\sin\theta_1}{1-\sin^2\theta_1}$$

si l'on fait

$$e^{\frac{r\cos^2\theta_1}{B}} \cdot \int_{\cos\theta_1\sqrt{\frac{r}{B}}}^{x} e^{-t^2}\, dt = \Phi_r,$$

r étant un nombre entier positif [*]; et pour $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, on a conséquemment

$$(29\ bis)\quad R_{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{A}{B}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{B}}\left\{1 - \frac{A}{B} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{A}{B}} + \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B}\right)^2 \cdot 3^{\frac{3}{2}} \cdot e^{\frac{2A}{B}} - \frac{1}{2.3} \cdot \left(\frac{A}{B}\right)^3 \cdot 4^{\frac{5}{2}} \cdot e^{\frac{3A}{B}} + \ldots\right\}\frac{2}{1-\sin^2\theta_1}$$

Tables de réfraction.

9. Une Table de réfractions relatives à des distances apparentes échelonnées de 0 à 90 degrés, pour une pression atmosphérique et une température indéterminées au lieu de l'observation, étant construite d'après les formules qui ont été données dans cette Thèse, on en déduit la réfraction relative à une distance zénithale qui ne se trouve pas dans la Table, et qui a été observée sous une pression et à une température différentes de celles pour lesquelles elle a été calculée, par une interpolation semblable à celle des Tables de logarithmes quant à ce qui est de la différence des distances zénithales, et fondée pour le reste sur ce que la réfraction peut, à la même température, être regardée

[*] Le rapport du $(n+1)^{ième}$ terme de cette série à celui qui le précède est

$$\frac{A}{B} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n - \frac{1}{2}} e^{\frac{A}{B}} \cdot \frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n},$$

et il tend vers

$$\frac{A}{B} e^{1 + \frac{A}{B} + \frac{\cos^2\theta_1}{B}}$$

lorsque n croît indéfiniment; on ne peut donc employer cette série que pour des distances zénithales telles que cette limite soit < 1. Cette série et la suivante sont données par M. Plana (*Mémoires de Turin*, tome XXXII).

comme proportionnelle à la pression, tandis que les pressions à des températures t_1 et t'_1 sont proportionnelles à 1 et à $1 + \alpha(t_1 - t'_1)$. La proportionnalité des réfractions aux pressions est justifiée par la forme des coefficients R de l'équation (10).

Des procédés employés pour le calcul de la plupart des anciennes Tables.

10. Les plus anciennes Tables ont été calculées par des moyens qui reviennent, à peu près, à la recherche de quelques réfractions par l'observation et la grande loi du mouvement diurne, suivie d'interpolations faites à l'aide de diverses formules, pour les distances apparentes intermédiaires.

Le procédé très-simple, que j'ai indiqué dans le n° **1**, ne saurait donner exactement une réfraction, même lorsqu'on l'applique à une étoile très-brillante et passant près du zénith, parce que les distances du pôle à l'étoile et au zénith sont affectées par le phénomène de la réfraction; mais, si l'on employait, par exemple, la formule (12) réduite à quelques-uns des termes que j'y ai écrits, on pourrait déterminer les coefficients de manière à lui faire donner les réfractions approchées déduites du calcul trigonométrique, puis s'en servir pour corriger les éléments de ce calcul, et le recommencer ensuite.

Tycho-Brahé imagina de faire dépendre l'un de l'autre les coefficients des deux premiers termes, à l'aide des distances solstitiales du Soleil, et ce moyen, par lequel on évite l'emploi de la distance zénithale du pôle, a été perfectionné par Bradley.

Enfin, Delambre a déterminé trois coefficients, en poussant jusqu'à la cinquième puissance de tang ζ_1, par l'observation de quatre étoiles circompolaires; ce qui lui a donné une valeur du premier assez différente de celle de Bradley. Ce savant astronome s'est appliqué, pour le dire en passant, à expliquer le désaccord de ses prédécesseurs sur la grandeur des réfractions et sur les éléments des formules, et le résultat peut-être le plus remarquable de son travail, c'est que les réfractions sont les mêmes par tout le globe dans des circonstances peu différentes, contrairement à ce qu'on aurait dû conclure des Tables de Lacaille et de Bouguer.

SUR LES SURFACES ISOTHERMES ET ORTHOGONALES;

PAR M. OSSIAN BONNET.

(Extrait, par l'auteur, d'un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences, 2me semestre 1849.)

Dans un Mémoire appartenant au tome VIII de ce Journal, M. Lamé a démontré, qu'à l'exception du cas des surfaces cylindriques et coniques, les seuls systèmes triples de surfaces isothermes et orthogonales sont les systèmes formés par les surfaces du second degré; j'ai depuis simplifié la démonstration de M. Lamé (*voyez* le xxxe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*), en faisant usage d'une propriété que j'ai reconnue appartenir à toutes les surfaces susceptibles de faire partie d'un système triple de surfaces isothermes et orthogonales, et d'après laquelle, sur une même ligne de courbure de ces surfaces, le rayon de courbure correspondant varie proportionnellement au cube de l'autre rayon de courbure principal; néanmoins, la démonstration de M. Lamé est encore très-compliquée. Je me propose, dans ce second travail, de montrer que l'exactitude du théorème peut être mise hors de doute par des considérations extrêmement simples.

Soit un système triple de surfaces isothermes et orthogonales que j'appellerai le système (A); considérons les trois surfaces particulières qui passent par le point M de l'espace. Les trois lignes d'intersection de ces surfaces formeront trois axes courbes des coordonnées dont le point M sera l'origine; pour fixer les idées, nous désignerons, avec M. Lamé, ces axes des coordonnées par les noms d'axes des s, des s_1, des s_2, relatifs au point M, les surfaces considérées étant dès lors les surfaces des $s_1 s_2$, des $s s_2$, des $s s_1$, relatives au même point; enfin, je représenterai les rayons de courbure des surfaces coordonnées par (γ_1, c_2), (γ_2, c), (γ, c_1), l'indice étant toujours celui de la coordonnée tangente à la section principale correspondante, et le signe qui accompagne les rayons de courbure étant $+$ ou $-$, selon que le centre de

courbure de la section principale est ou non du côté des coordonnées positives.

Ceci posé, on aura d'abord les neuf formules de M. Lamé :

$$(a)\quad \begin{cases} \dfrac{d\frac{1}{c}}{ds_2} = \dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{\gamma_2}\right), & \dfrac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_1} = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{1}{\gamma} - \dfrac{1}{c}\right), \\[2ex] \dfrac{d\frac{1}{c_1}}{ds} = \dfrac{1}{\gamma_1}\left(\dfrac{1}{c_1} - \dfrac{1}{\gamma}\right), & \dfrac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds_2} = \dfrac{1}{c_1}\left(\dfrac{1}{\gamma_1} - \dfrac{1}{c_2}\right), \\[2ex] \dfrac{d\frac{1}{c_2}}{ds_1} = \dfrac{1}{\gamma_2}\left(\dfrac{1}{c_2} - \dfrac{1}{\gamma_1}\right), & \dfrac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds} = \dfrac{1}{c_2}\left(\dfrac{1}{\gamma_2} - \dfrac{1}{c}\right); \end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{cases} \dfrac{d\frac{1}{c}}{ds_1} + \dfrac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds} = \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{\gamma_1^2} + \dfrac{1}{\gamma c_1}, \\[2ex] \dfrac{d\frac{1}{c_1}}{ds_2} + \dfrac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds_1} = \dfrac{1}{c_1^2} + \dfrac{1}{\gamma_2^2} + \dfrac{1}{\gamma_1 c_2}, \\[2ex] \dfrac{d\frac{1}{c_2}}{ds} + \dfrac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_2} = \dfrac{1}{c_2^2} + \dfrac{1}{\gamma^2} + \dfrac{1}{\gamma_2 c}; \end{cases}$$

qui expriment que les surfaces considérées sont orthogonales; puis les suivantes dues à M. Bertrand :

$$(c)\qquad \frac{\gamma}{c_1} + \frac{c}{\gamma_2} = 1, \qquad \frac{\gamma_1}{c_2} + \frac{c_1}{\gamma} = 1, \qquad \frac{\gamma_2}{c} + \frac{c_2}{\gamma_1} = 1,$$

dont deux seulement sont distinctes, et qui donnent aisément

$$(d)\qquad c c_1 c_2 + \gamma \gamma_1 \gamma_2 = 0,$$

en même temps qu'elles permettent de transformer les relations (a) comme il suit :

$$(e)\quad \begin{cases} \dfrac{d\frac{1}{c}}{ds_2} = \dfrac{1}{c c_1}, & \dfrac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_1} = \dfrac{1}{\gamma \gamma_2}, \\[2ex] \dfrac{d\frac{1}{c_1}}{ds} = \dfrac{1}{c_1 c_2}, & \dfrac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds_2} = \dfrac{1}{\gamma_1 \gamma}, \\[2ex] \dfrac{d\frac{1}{c_2}}{ds_1} = \dfrac{1}{c_2 c}, & \dfrac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds} = \dfrac{1}{\gamma_2 \gamma_1}; \end{cases}$$

enfin, celles-ci, que j'ai données dans mon premier Mémoire,

$$(f)\quad \begin{cases} \dfrac{d\frac{1}{c}}{ds} = \dfrac{3}{c\gamma_1}, & \dfrac{d\frac{1}{\gamma}}{ds} = \dfrac{3}{\gamma c_1}, \\[2ex] \dfrac{d\frac{1}{c_1}}{ds_1} = \dfrac{3}{c_1\gamma_2}, & \dfrac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds_1} = \dfrac{3}{\gamma_1 c}, \\[2ex] \dfrac{d\frac{1}{c_2}}{ds_2} = \dfrac{3}{c_2\gamma}, & \dfrac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds_2} = \dfrac{3}{\gamma_2 c_1}; \end{cases}$$

$$(g)\quad \begin{cases} \gamma_1 \dfrac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds} - c_2 \dfrac{d\frac{1}{c_2}}{ds} = -\dfrac{2\gamma_2}{c c_2} = \dfrac{2}{\gamma} - \dfrac{2}{c}, \\[2ex] \gamma_2 \dfrac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds_1} - c \dfrac{d\frac{1}{c}}{ds} = -\dfrac{2\gamma}{c c} = \dfrac{2}{\gamma} - \dfrac{2}{c}, \\[2ex] \gamma \dfrac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_2} - c_1 \dfrac{d\frac{1}{c_1}}{ds_2} = -\dfrac{2\gamma_1}{c c_1} = \dfrac{2}{\gamma} - \dfrac{2}{c}. \end{cases}$$

On déduit immédiatement de ces différentes formules plusieurs conséquences importantes; d'abord les formules (c) et (d) montrent que, parmi les trois surfaces passant par un même point de l'espace, il y en a deux pour lesquelles les rayons de courbure principaux sont de même signe, et une pour laquelle ces rayons ont des signes contraires. En effet, il est impossible que, pour deux de ces surfaces, les rayons de courbure principaux soient de signes contraires: car si, par exemple, γ et c_1 étaient de signes contraires en même temps que γ_2 et c, le premier membre de la première des relations (c) serait négatif, tandis que le second est positif; en second lieu, les trois surfaces ne peuvent avoir leurs rayons de courbure principaux de même signe, car la relation (d), qui peut s'écrire ainsi

$$\frac{c}{\gamma}\cdot\frac{c_1}{\gamma}\cdot\frac{c_2}{\gamma} + 1 = 0,$$

aurait alors son premier membre positif; ainsi il faut nécessairement que deux des trois surfaces passant au point M aient leurs rayons de courbure principaux de même signe et que la troisième les ait de

signes contraires. Cette première propriété permet de distinguer une des surfaces des deux autres; tâchons maintenant d'établir de même une distinction entre les deux surfaces qui ont leurs rayons de courbure principaux de même signe. Supposons que ces surfaces soient la surface des $s_1 s_2$ et celle des ss_1, et formons pour la première surface les deux expressions

$$(h)\qquad \frac{d\frac{1}{c_2}}{ds} - \frac{2}{c_2^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\gamma_1}{c_2}\frac{1}{c^2}, \quad \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds} - \frac{2}{\gamma_1^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{c_2}{\gamma_1}\frac{1}{\gamma^2},$$

qui, d'après les formules (g), ne diffèrent que par le facteur $\frac{c_2}{\gamma_1}$ et sont, par conséquent, de même signe; puis, pour la seconde surface, les deux expressions analogues,

$$(k)\qquad \frac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_2} - \frac{2}{\gamma^2} + \frac{1}{c_2^2} + \frac{c_1}{\gamma}\frac{1}{\gamma_2^2}, \quad \frac{d\frac{1}{c_1}}{ds_2} - \frac{2}{c_1^2} + \frac{1}{\gamma_2^2} + \frac{\gamma}{c_1}\frac{1}{c_2^2}.$$

Si nous ajoutons la première des expressions (h) à la première des expressions (k), il viendra, en se rappelant la dernière des relations (b), et puis les relations (d) et (c),

$$\frac{1}{\gamma_2 c} + \frac{\gamma_1}{c_2}\frac{1}{c^2} + \frac{c_1}{\gamma}\frac{1}{\gamma_2^2} = \frac{1}{\gamma_2 c} + \frac{\gamma\gamma_1\gamma_2^2 + c^2 c_1 c_2}{\gamma\gamma_2^2 c^2 c_2}$$
$$= \frac{1}{\gamma_2 c} + \frac{\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_2 - c^2}{\gamma\gamma_2^2 c^2 c_2} = \frac{1}{\gamma_2 c}\left[1 + \frac{\gamma_1}{c_2}\left(\frac{\gamma_2}{c} - 1\right)\right] = 0.$$

Cela montre qu'en excluant d'abord le cas où ces expressions seraient nulles, les expressions (h) et les expressions (k) ont des signes contraires; aussi les deux surfaces qui ont leurs rayons de courbure principaux de même signe peuvent aussi être distinguées l'une de l'autre.

Dans ce qui va suivre, nous supposerons toujours que les surfaces des $s_1 s_2$ et des ss_1 soient celles pour lesquelles les rayons de courbure principaux sont de même signe, et que la surface des $s_1 s_2$ soit telle, que les deux expressions (h) aient le même signe $+$; de plus, nous fixerons la partie positive de l'axe des s, de façon que les rayons de courbure c_2, γ_1 de la surface des $s_1 s_2$ soient négatifs, et la partie positive de l'axe des s_1, de manière que le rayon de courbure γ_2 de la surface des ss_2 soit aussi négatif, le rayon de courbure c conjugué en surface étant dès lors positif; quant à la partie positive de l'axe des s_2, elle se trouvera déterminée par cela même, car il faut qu'en se plaçant suivant la partie positive de l'axe des s, les pieds sur la surface

des $s_1 s_2$, on ait la partie positive de l'axe des s_2 à gauche et la partie positive de l'axe des s_1 à droite.

Prenons maintenant le système particulier de surfaces isothermes et orthogonales, composé d'ellipsoïdes et d'hyperboloïdes à une et à deux nappes de même centre et de mêmes foyers, que j'appellerai le système (A'). Considérons les trois surfaces de ce système qui passent par un point quelconque M' de l'espace. Les trois lignes d'intersection de ces surfaces formeront trois axes courbes de coordonnées dont le point M' sera l'origine; nous désignerons ces axes par les noms d'axes des s', des s'_1, des s'_2 relatifs au point M', les surfaces considérées étant dès lors les surfaces des $s'_1 s'_2$, des $s'_2 s'$ et des $s' s'_1$ relatives au même point: enfin, je représenterai les rayons de courbure des surfaces coordonnées par (γ'_1, c'_2), (γ'_2, c'), (γ', c'_1), l'indice étant toujours celui de la coordonnée tangente à la section principale correspondante, et le signe qui accompagne les rayons de courbure étant $+$ ou $-$, selon que le centre de courbure de la section principale est ou non du côté des coordonnées positives.

D'abord nous aurons, entre les rayons de courbure (γ_1, c_2), (γ_2, c), (γ, c_1) et leurs variations, des formules analogues aux formules (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g) et qui se déduiront simplement de ces dernières en donnant un accent aux lettres c, c_1, c_2, γ, γ_1, γ_2, s, s_1, s_2; nous appellerons ces nouvelles relations les égalités (a'), (b'), (c'), (d'), (e'), (f'), (g'); en second lieu, si nous supposons que la surface des $s'_1 s'_2$ soit un ellipsoïde, la surface des $s' s'_1$ un hyperboloïde à deux nappes, et la surface des $s' s'_2$ un hyperboloïde à une nappe, les deux rayons de courbure principaux γ'_1, c'_2 seront de même signe, de même que γ' et c'_1, et les deux autres γ'_2, c' de ces rayons de courbure auront des signes contraires; on pourra donc fixer la partie positive de l'axe des s' et celle des s'_1 (ce qui déterminera aussi la partie positive de l'axe des s'_2), de façon que γ'_1, c'_1, γ'_2 soient négatifs. Cela étant, je dis que les deux expressions

$$\frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'} - \frac{2}{c'^2_2} + \frac{1}{\gamma'^2_2} + \frac{\gamma'_1}{c'_2}\frac{1}{c'^2}, \quad \frac{d\frac{1}{\gamma'_1}}{ds'} - \frac{2}{\gamma'^2_1} + \frac{1}{c'^2} + \frac{c'_2}{\gamma'_1}\frac{1}{\gamma'^2},$$

seront positives et que l'on pourra déterminer les éléments [*] qui

[*] Ces éléments, au nombre de cinq, sont, par exemple, les distances focales de

fixent la grandeur des surfaces du système (A') passent par le point M' de façon que l'on ait les cinq relations

$$\gamma_1 = \gamma'_1, \quad c_2 = c'_2, \quad \gamma_2 = \gamma'_2, \quad c_1 = c'_1, \quad \frac{d\frac{1}{c_2}}{ds} = \frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'},$$

pour les points M et M'.

Pour le faire voir, il est d'abord nécessaire d'obtenir l'expression des différentes quantités c'_2, γ'_1, γ'_2, c'_1, $\frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'}$.

Rapportons la surface des $s'_1 s'_2$ relative au point M' à trois axes rectilignes rectangulaires, et supposons que les parties positives M'X, M'Y, M'Z de ces axes soient respectivement les tangentes au point M' des axes des s', s'_1, s'_2 relatifs à ce point, ces tangentes étant d'ailleurs dirigées dans le sens positif des coordonnées courbes s', s'_1, s'_2. L'équation de la surface sera

$$(1) \qquad z = \frac{a}{2}x^2 + \frac{a'}{2}y^2 + \frac{a''}{2}z^2 + b'xz + byz,$$

car il faut que, pour $x = 0$, $y = 0$, on ait

$$z = 0, \quad \frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dy} = 0, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = 0,$$

puisque le plan des xy est le plan tangent à l'origine et que les plans des zx et des zy sont les plans des sections principales au même point. Dans l'équation (1) les coefficients a et a' sont égaux évidemment aux valeurs que prennent pour $x = 0$, $y = 0$ les dérivées secondes $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, et, par conséquent, représentent les inverses des rayons de courbure c'_2 et γ'_1; quant aux autres coefficients b, b', a'', je dis qu'ils s'expriment facilement en fonction des rayons de courbure γ'_2, c'_1, et de la variation $\frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'}$. Prenons, en effet, l'équation générale

$$\frac{dy}{dx}[(1+q^2)s - pqt] + \frac{dy}{dx}[(1+q^2)r - (1+p^2)t] - [(1+p^2)s - pqr] = 0$$

---

deux des sections principales des surfaces et les axes majeurs de ces mêmes surfaces.

de la projection sur le plan des xy des lignes de courbure de la surface (1), p, q, r, s, t ayant la signification ordinaire; différentions cette équation par rapport à x, en nous rappelant que z doit être remplacé par sa valeur déduite de l'équation (1), et dans le résultat faisons $x = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$, ce qui exprime qu'il s'agit de la ligne de courbure tangente à M′X et du point M′ de cette ligne, il viendra simplement

$$\frac{d^2y}{dx^2}(r - t) = \frac{ds}{dx},$$

mais, par l'équation (1), on voit aisément que la valeur de $\frac{ds}{dx}$ pour $x = 0, y = 0$ est égale à $a.b$, donc

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a.b}{a - a'};$$

d'ailleurs, puisque $\frac{dy}{dx}$ est nul au point M′, $\frac{d^2y}{dx^2}$ représente pour ce point l'inverse du rayon de courbure de la projection sur le plan des xy de la ligne de courbure, et, par conséquent, l'inverse du rayon de courbure de la section normale déterminée dans la surface des $s's'_2$ par le plan des xy; ainsi

$$\frac{1}{\gamma_2} = \frac{a.b}{a - a'}.$$

On trouverait de même

$$\frac{1}{c_4} = \frac{a'.b'}{a' - a}.$$

Ce qui montre déjà que b et b' s'expriment aisément en fonction de γ_2, c_4 et de a et a' ou c_2 et γ_4. Occupons-nous maintenant de a'.

Considérons un ellipsoïde infiniment voisin de l'ellipsoïde (1) et ayant les mêmes foyers que lui; soit

$$(2)\quad \begin{cases} z = \left(\frac{a}{2} + \alpha m\right)x^2 + \left(\frac{a'}{2} + \alpha' m\right)y^2 + \left(\frac{a}{2} + \alpha'' m\right)z^2 \\ \quad + \beta'' mxy + (b' + \beta' m)xz + (b + \beta m)yz + \varepsilon mx + \varepsilon' my + m, \end{cases}$$

où m représente un paramètre infiniment petit, l'équation de cette surface, et tâchons d'abord de déterminer les valeurs des constantes α, α', α'', β, β', β'', ε, ε'. Pour cela, prenons en même temps que les

deux surfaces (1) et (2) un nouvel ellipsoïde infiniment voisin de l'ellipsoïde (1) et homothétique avec lui, dont l'équation aura la forme

$$z = \frac{a}{2}x^2 + \frac{a'}{2}y^2 + \frac{a''}{2}z^2 + b'xz + byz + m',$$

m' représentant une constante infiniment petite. La distance des deux surfaces (1) et (2) sera, pour un point quelconque, d'après une formule connue, égale à

$$\frac{(\alpha x^2 + \alpha' y^2 + \alpha'' z^2 + \beta'' xy + \beta' xy + \beta yz + \varepsilon x + \varepsilon' y + 1)\,m}{\pm\sqrt{(ax + b'z)^2 + (a'y + bz)^2 + (a''z + b'x + by - 1)^2}},$$

et, par conséquent, pour le point M' égale à $\pm m$; de même la distance des surfaces (1) et (3) sera, pour un point quelconque, égale à

$$\frac{m'}{\pm\sqrt{(ax + b'z)^2 + (a'y + bz)^2 + (a''z + b'x + by - 1)^2}},$$

et, par conséquent, pour le point M' égale à $\pm m'$; or on sait, d'après une propriété bien connue dans la théorie de l'attraction, que le produit des deux distances précédentes doit être le même pour tous les points de l'ellipsoïde (1), cela exige évidemment que l'on ait, pour tous les points de cette surface,

$$\begin{aligned}&\alpha x^2 + \alpha' y^2 + \alpha'' z^2 + \beta'' xy + \beta' xz + \beta yz + \varepsilon x + \varepsilon' y + 1\\ &= (ax + b'z)^2 + (a'y + bz)^2 + (a''z + b'x + by - 1)^2,\end{aligned}$$

c'est-à-dire que cette dernière équation coïncide avec l'équation (1), d'où l'on déduit aisément

$$\begin{aligned}&\alpha = a^2 + b'^2 - aa'', \quad &&\alpha' = a'^2 + b^2 - a'a'', \quad &&\alpha'' = b^2 + b'^2,\\ &\beta'' = 2bb', &&\beta' = 2ab', &&\beta = 2a'b,\\ &\varepsilon = -2b', &&\varepsilon' = -2b.\end{aligned}$$

Reprenons maintenant la surface représentée par l'équation (2), et cherchons ses rayons de courbure principaux au point où elle est rencontrée par l'axe des z, c'est-à-dire au point dont les coordonnées sont $x = 0$, $y = 0$, $z = m$. D'abord, par la forme même de l'équation (2), on reconnaît que les valeurs de $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, $\frac{d^2z}{dx\,dy} = s$, déduites de cette équation, sont infiniment petites du premier ordre par rapport à m, au point considéré; de telle sorte qu'en négligeant

le carré de ce paramètre. l'équation générale

$$R^2(rt - s^2) - R\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t] + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0,$$

au moyen de laquelle on détermine les rayons de courbure principaux pour un point quelconque, se réduit à

$$R^2 rt - R(r + t) + 1 = 0,$$

dans le cas particulier considéré, et donne, par conséquent, pour les rayons de courbure demandés,

$$R' = \frac{1}{r}, \quad R'' = \frac{1}{t}.$$

On voit par là que tout est ramené à calculer les valeurs de $\frac{d^2z}{dx^2}$ et de $\frac{d^2z}{dy^2}$, déduites de l'équation (2), pour $x = 0$, $y = 0$, $z = m$. Or, différentiant deux fois par rapport à x, faisant $x = 0$, $y = 0$, $z = m$, et négligeant les infiniment petits du second ordre, on trouve sans difficulté

$$r = \frac{a + 2(b'^2 + b'\varepsilon + \alpha)m}{1 - a''m} = a + (aa'' + 2b'^2 + 2b'\varepsilon + 2\alpha)m,$$

ou, en substituant à α et ε leurs valeurs trouvées ci-dessus,

$$r = a + (2a^2 - aa'')m;$$

on trouverait de même

$$t = a' + (2a'^2 - a'a'')m,$$

de telle sorte qu'en reprenant les notations employées plus haut, nous avons

$$\frac{d\frac{1}{c_2}}{ds} = 2a^2 - aa'', \quad \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds} = 2a'^2 - a'a''.$$

Ainsi a'' peut se déduire de $\frac{d\frac{1}{c_2}}{ds}$ et de $a = \frac{1}{c_2}$, ou bien de $\frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds}$ et de $a' = \frac{1}{\gamma_1}$.

Maintenant que nous connaissons a, a', a'', b, b' en fonction de c'_2, γ'_2, c'_1, γ'_1, $\frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'}$, il est bien facile de démontrer, comme cela a été énoncé ci-dessus, que l'expression

$$(h') \qquad \frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'} - \frac{2}{c'^2_2} + \frac{1}{\gamma'^2} + \frac{\gamma'_1}{c'_2}\frac{1}{c'^2},$$

et, par suite, l'expression

$$\frac{d\frac{1}{\gamma'_1}}{ds'} - \frac{2}{\gamma'^2_1} + \frac{1}{c'^2} + \frac{c'_2}{\gamma'_1}\frac{1}{\gamma'^2},$$

sont positives, et qu'il est possible de déterminer l'ellipsoïde représenté par l'équation (1) de façon que c'_2, γ'_2, c'_1, γ'_1, $\frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'}$ soient égaux respectivement à c_2, γ_2, c_1, γ_1, $\frac{d\frac{1}{c_2}}{ds}$.

En effet, exprimons que l'équation (1) représente un ellipsoïde. il faudra pour cela écrire d'abord que la surface à un centre, c'est-à-dire que l'on a

$$aa'a'' - a'b'^2 - ab^2 \lesseqgtr 0.$$

Or, en remarquant que

$$a = \frac{1}{c'_2}, \quad a' = \frac{1}{\gamma'_1},$$

puis, que

$$b = \frac{1}{\gamma'_2}\left(1 - \frac{a'}{a}\right) = \frac{1}{\gamma'_2}\left(1 - \frac{c'_2}{\gamma'_1}\right), \quad b' = \frac{1}{c'_1}\left(1 - \frac{a'}{a'}\right) = \frac{1}{c'}\left(1 - \frac{\gamma'_1}{c'_1}\right),$$

c'est-à-dire, d'après les relations (c'),

$$b = \frac{1}{c'}, \quad b' = \frac{1}{\gamma'},$$

enfin, que

$$aa'' = 2a^2 - \frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'} = \frac{2}{c'^2_2} - \frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'}.$$

Cette relation revient à

$$\frac{2}{\gamma_1 c_2'} - \frac{1}{\gamma'}\frac{d\frac{1}{c_2'}}{ds'} - \frac{1}{\gamma_1 \gamma'} - \frac{1}{c_2' c'^2} \lessgtr 0.$$

Aussi nous pouvons déjà conclure que l'expression (h') est différente de zéro; en second lieu, si nous rapportons la surface représentée par l'équation (1) à son centre, ce qui change cette équation en

$$\frac{a}{2}x^2 + \frac{a'}{2}y^2 + \frac{a}{2}z^2 + b'xz + byz = \frac{-aa'}{2(aa'a'' - ab^2 - a'b'^2)},$$

il faudra (*voir*, par exemple, la *Géométrie à trois dimensions* de M. Leroy, page 156), pour que cette surface soit un ellipsoïde que l'équation

$$(s-a)(s-a')(s-a'') - b^2(s-a) - b'^2(s-a') = 0$$

ait ses trois racines de même signe que le second membre

$$\frac{-aa'}{2(aa'a'' - ab^2 - a'b'^2)}.$$

Or l'équation en s ayant une racine comprise entre a' et a, comme on le voit aisément, et, par conséquent, négative, d'après les hypothèses faites sur les signes de c_2' et de γ_1', cela ne peut être qu'autant que

$$\frac{-aa'}{2(aa'a'' - ab^2 - a'b'^2)}$$

est aussi négatif, par conséquent, qu'autant que

$$aa'a'' - ab^2 - a'b'^2$$

est positif, ou bien, en se rappelant la valeur de cette expression et le signe de γ_1', qu'autant que

$$\frac{d\frac{1}{c_2}}{ds'} - \frac{2}{c_1'^2} + \frac{1}{\gamma'} + \frac{\gamma_1'}{c_1'}\frac{1}{c'^2}$$

est positif; d'ailleurs cette condition, qui est nécessaire, est aussi suffisante si $aa'a'' - ab^2 - a'b'^2$ est positif; la substitution à la place de s dans l'équation en s des différentes valeurs $-\infty$, a', a, 0, donne successivement les signes $-$, $+$, $-$, $+$, ce qui prouve que cette

équation a ses trois racines négatives. De tout ce qui précède résulte que l'équation (1) ne peut représenter un ellipsoïde qu'autant que a, a', a'', b, b' sont tels, que

$$\frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'} - \frac{2}{c'^2_1} + \frac{1}{\gamma'^2} + \frac{\gamma'_1}{c'_1}\frac{1}{c'^2}$$

soit positif, mais qu'une fois cette condition remplie, on peut prendre arbitrairement a, a', a'', b, b', et, par conséquent, de telle sorte, que l'on ait

$$c'_2 = c_2, \quad \gamma'_1 = \gamma_1, \quad \gamma'_2 = \gamma_2, \quad c'_1 = c_1, \quad \frac{d\frac{1}{c'_2}}{ds'} = \frac{d\frac{1}{c_2}}{ds}.$$

Je dis maintenant que, par cela même que l'on a pour les points M et M′ les relations précédentes, les surfaces des $s_1 s_2$, des $s_2 s$, des $s s_1$, relatives au point M, coïncident respectivement avec les surfaces des $s'_1 s'_2$, des $s'_2 s'$, des $s' s'_1$, relatives au point M′. En effet, à cause des relations (c) et (c'), les six rayons de courbure c, c_1, c_2, γ, γ_1, γ_2 seront égaux aux six rayons de courbure c', c'_1, c'_2, γ', γ'_1, γ'_2 pour les points M et M′; puis, à cause des relations (c) et (e'), (f) et (f'), (g), (a) et $g')$, (a'), les dix-huit accroissements des rayons de courbure c, c_1, c_2, γ, γ_1, γ_2, correspondants à des déplacements infiniment petits effectués sur les axes des s, s_1, s_2, relatifs au point M, seront égaux respectivement aux dix-huit accroissements des rayons de courbure c', c'_1, c'_2, γ', γ'_1, γ'_2, dus à des déplacements égaux effectués sur les axes des s', s'_1, s'_2, relatifs au point M′. Cela montre que si l'on prend successivement, à partir du point M sur les axes des s, s_1, s_2 relatifs à ce point, des longueurs infiniment petites Mm, Mm_1, Mm_2, et, à partir du point M′ sur les axes des s', s'_1, s'_2 relatifs à ce point, des longueurs M′m', M′m'_1, M′m'_2 respectivement égales, les six rayons de courbure c, c_1, c_2, γ, γ_1, γ_2 seront égaux aux six rayons de courbure c', c'_1, c'_2, γ', γ'_1, γ'_2 pour les points m et m', m_1 et m'_1, m_2 et m'_2. D'un autre côté, les variations $\frac{d\gamma_1}{ds_1}$, $\frac{d\gamma'_1}{ds'_1}$ ne dépendent respectivement, d'après les relations (e) et (e'), que de γ_1, c, γ'_1, c'. On peut donc conclure que ces variations sont égales quand elles se rapportent aux points m et m'.

Or, si μ est le point où l'axe des s relatif au point m_1 rencontre

l'axe des s_2 relatif au point m, et μ' le point où l'axe des s' relatif au point m'_1 rencontre l'axe des s'_1 relatif au point m', il est facile de voir que l'on a

$$m\mu = m'\mu' \qquad \text{et} \qquad m_1\mu = m'_1\mu',$$

car

$$m\mu = \mathrm{M}m + \frac{\mathrm{M}m.\mathrm{M}m_1}{\gamma_1}, \quad m'\mu' = \mathrm{M}'m'_1 + \frac{\mathrm{M}'m'.\mathrm{M}'m'_1}{\gamma'},$$

$$m_1\mu = \mathrm{M}m + \frac{\mathrm{M}m.\mathrm{M}m_1}{c}, \quad m'_1\mu' = \mathrm{M}'m' + \frac{\mathrm{M}'m'.\mathrm{M}'m'_1}{c'}.$$

Cela montre que le rayon de courbure γ_1 pour le point μ est égal au rayon de courbure γ'_1 pour le point μ', d'où résulte que la variation $\frac{d\gamma_1}{ds}$ pour le point m_1 est égale à la variation $\frac{d\gamma'_1}{ds'}$ pour le point m'_1. Cela étant, on a aux points m_1 et m'_1 les mêmes relations entre les rayons de courbure $c, c_1, c_2, \gamma, \gamma_1, \gamma_2, c', c'_1, c'_2, \gamma', \gamma'_1, \gamma'_2$ qu'on avait primitivement aux points M et M', c'est-à-dire

$$c = c', \quad c_1 = c'_1, \quad c_2 = c'_2, \quad \gamma = \gamma', \quad \gamma_1 = \gamma'_1, \quad \gamma_2 = \gamma'_2, \quad \frac{d\gamma_1}{ds} = \frac{d\gamma'_1}{ds'},$$

et l'on peut conclure que si, sur les axes des s, s_1, s_2 relatifs au point m_1, on prend successivement trois longueurs infiniment petites m_1n, m_1n_1, m_1n_2; puis, sur les axes des s', s'_1, s'_2 relatifs au point m'_1, des longueurs m'_1n', $m'_1n'_1$, $m'_1n'_2$ respectivement égales, les six rayons de courbure $c, c_1, c_2, \gamma, \gamma_1, \gamma_2$ seront les mêmes que les six rayons de courbure $c', c'_1, c'_2, \gamma', \gamma'_1, \gamma'_2$ pour les points n et n', n_1 et n'_1, n_2 et n'_2. On verrait de même qu'en prenant sur les axes des s, s_1, s_2 relatifs au point n_1 des longueurs infiniment petites n_1p, n_1p_1, n_1p_2, et sur les axes des s', s'_1, s'_2 relatifs au point n'_1 des longueurs respectivement égales n'_1p', $n'_1p'_1$, $n'_1p'_2$, les six rayons de courbure $c, c_1, c_2, \gamma, \gamma_1, \gamma_2$ sont égaux aux six rayons de courbure $c', c'_1, c'_2, \gamma', \gamma'_1, \gamma'_2$ pour les points p et p', p_1 et p'_1, p_2 et p'_2, et ainsi de suite; de telle sorte qu'on peut conclure généralement que les six rayons de courbure $c, c_1, c_2, \gamma, \gamma_1, \gamma_2$ sont égaux aux six rayons de courbure $c', c'_1, c'_2, \gamma', \gamma'_1, \gamma'_2$ pour deux points quelconques N et N' situés, l'un sur l'axe des s_1 relatif au point M, l'autre sur l'axe des s'_1 relatif au point M', et tels, que l'arc MN = l'arc M'N'. Ceci démontré, je dis que l'axe des s_1 relatif au point M et l'axe des s'_1 relatif au point M' sont superposables. En effet, soient, comme tout à l'heure, sur la pre-

mière ligne, une suite de longueurs infiniment petites Mm_1, m_1n_1, n_1p_1,..., et sur la seconde, des éléments égaux $M'm'_1$, $m'_1n'_1$, $n'_1p'_1$,.... Appelons r le rayon de courbure au point M de la ligne $Mm_1n_1p_1$..., et α l'angle que ce rayon de courbure fait avec la tangente au point M de l'axe des s relatif à ce point; on aura, d'après le théorème de Meunier,

$$\frac{r}{\cos\alpha} = \gamma_1, \qquad \frac{r}{\sin\alpha} = c_1,$$

γ_1, c_1 se rapportant au point M; de même, on a

$$\frac{r'}{\cos\alpha'} = \gamma'_1, \qquad \frac{r'}{\sin\alpha'} = c'_1,$$

γ'_1 et c'_1 se rapportant au point M', r' étant le rayon de courbure de la ligne $M'm'_1n'_1p'_1$... au point M', et α' l'angle de ce rayon de courbure avec la tangente au point M' de l'axe des s' relatif à ce point. De là on conclut, à cause de $\gamma_1 = \gamma'_1$, $c_1 = c'_1$,

$$r = r' \quad \text{et} \quad \alpha = \alpha'.$$

On voit par là que si l'on fait coïncider l'élément $M'm'_1$ avec l'élément Mm_1, et la tangente au point M de l'axe des s relatif à ce point avec la tangente au point M' de l'axe des s' relatif à ce point, l'élément $m'_1n'_1$ coïncidera avec l'élément m_1n_1; mais en appelant r_1 le rayon de courbure de $Mm_1n_1p_1$... au point m_1 et α_1 l'angle de ce rayon de courbure avec la tangente au point m_1 de l'axe des s relatif à ce point, puis r'_1 le rayon de courbure de $M'm'_1n'_1p'_1$... au point m'_1, et α'_1 l'angle de ce rayon de courbure avec la tangente au point m'_1 de l'axe des s' relatif à ce point, on démontrerait de même que $r_1 = r'_1$, $\alpha_1 = \alpha'_1$. Donc, par cela même que les deux éléments $m'_1n'_1$, m_1n_1 coïncident, il en sera de même des éléments suivants $n'_1p'_1$, n_1p_1, puisque d'ailleurs l'axe des s relatif au point m_1 et l'axe des s' relatif au point m'_1 coïncident évidemment; ainsi de suite pour tous les éléments. Ainsi les deux lignes $Mm_1n_1p_1$..., $M'm'_1n'_1p'_1$... peuvent coïncider. La conséquence précédente se déduisant uniquement de ce que l'on a pour les points M et M' les relations

$$c = c', \quad c_1 = c'_1, \quad c_2 = c'_2, \quad \gamma = \gamma', \quad \gamma_1 = \gamma'_1 \quad \gamma_2 = \gamma'_2 \quad \frac{d\gamma_1}{ds} = \frac{d\gamma'_1}{ds},$$

et ces relations étant évidemment satisfaites pour les points m_2 et m'_2,

et de même pour tous les couples de points respectivement situés sur l'axe des s_2 relatif au point M et l'axe des s'_2 relatif au point M′, à égale distance de M et M′, on voit sans peine que les différentes lignes de courbure d'un même système de la surface des $s_1 s_2$ relative au point M, coïncident respectivement avec celles de la surface des $s_1 s_2$ relative au point M′, par conséquent, ces deux surfaces sont égales. On démontrerait de même successivement l'égalité des surfaces des $s s_1$ et des $s' s'_1$ et celle des surfaces des $s s_2$ et des $s' s'_2$. Donc les différentes surfaces du système (A) coïncident avec celles du système (A′) et sont, par conséquent, des ellipsoïdes et des hyperboloïdes à une et à deux nappes, de même centre et de mêmes foyers.

Nous avons écarté, dès le début, le cas où l'on aurait

$$\frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds} - \frac{2}{\gamma_1^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{c_2}{\gamma_1}\frac{1}{\gamma^2} = 0.$$

Si cette relation avait lieu et que, par conséquent, la variation $\frac{d\gamma_1}{ds}$ pût être déterminée en fonction des rayons de courbure $c, c_1, c_2, \gamma, \gamma_1, \gamma_2$ seulement, il faudrait prendre pour le système (A′) le système triplement orthogonal et isotherme formé par des paraboloïdes de mêmes foyers; l'on aurait aussi

$$\frac{d\frac{1}{\gamma'_1}}{ds'} - \frac{2}{\gamma'^2_1} + \frac{1}{c'^2} + \frac{c'_2}{\gamma'_1}\frac{1}{\gamma'^2} = 0.$$

Comme on le voit, en exprimant, par la marche indiquée plus haut, que le paraboloïde qui sert de surface des $s'_1 s'_2$ n'a pas de centre, et alors déterminant les quatre paramètres arbitraires qui fixent la grandeur des trois paraboloïdes passant par le point M′, de façon que l'on eût

$$c_2 = c'_2, \quad \gamma_1 = \gamma'_1, \quad \gamma_2 = \gamma'_2, \quad c_1 = c'_1,$$

on aurait en même temps

$$\frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds} = \frac{d\frac{1}{\gamma'_1}}{ds'},$$

et l'on prouverait alors, comme plus haut, que les surfaces du système (A) doivent coïncider avec les surfaces du système (A′), de manière que, dans ce cas, les surfaces du système (A) seraient des paraboloïdes de mêmes foyers.

Dans la démonstration précédente, on supposait nécessairement qu'aucun des rayons de courbure c, c_1, c_2, γ, γ_1, γ_2 ne pouvait être constamment infini; en effet, plusieurs des relations dont nous avons fait usage n'auraient aucun sens dans l'hypothèse contraire. Ainsi notre démonstration ne s'applique pas au cas où, parmi les surfaces orthogonales et isothermes, il s'en trouverait de développables. Or, on peut voir d'abord qu'une surface développable ne peut faire partie d'un système triple de surfaces orthogonales et isothermes, sans être un cône ou un cylindre; en effet, une pareille surface développable doit pouvoir être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure, c'est-à-dire par ses génératrices rectilignes et les trajectoires orthogonales de ces génératrices; appliquons la surface sur un plan, les carrés ne seront point altérés, il faudra donc que les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes qui sont des développantes de l'arête de rebroussement de la surface deviennent des cercles ou des droites, et cela ne peut être évidemment que si la surface développable est ou un cône ou un cylindre.

On voit, par là, qu'indépendamment des systèmes de surfaces orthogonales et isothermes formés par les surfaces du second degré homofocales, il peut y avoir d'autres systèmes où il entre des cônes ou des cylindres, mais qu'il n'y a que des systèmes de cette espèce.

Je terminerai par une remarque qui, je crois, n'a pas été faite. On sait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de cylindres à génératrices parallèles soient isothermes, est que les traces de ces cylindres sur un plan perpendiculaire aux génératrices et les trajectoires orthogonales de ces traces puissent découper leur plan commun en carrés infiniment petits; d'ailleurs tout système de cylindres isothermes fait nécessairement partie d'un système triple, orthogonal et isotherme. Il existe pour les cônes une condition analogue: pour que des cônes de même sommet soient isothermes, il faut et il suffit que leurs traces sur une sphère, ayant pour centre le sommet de ces cônes et les trajectoires orthogonales de ces traces, puissent découper la sphère en carrés infiniment petits, et tout système de cônes isothermes fait partie d'un système triple, orthogonal et isotherme.

NOTE

Sur les courbes décrites par les différents points d'une ligne droite mobile dont deux points sont assujettis à rester sur des directrices données;

PAR M. J. DE LA GOURNERIE,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

SOMMAIRE. — Quand un bielle transmet un mouvement circulaire alternatif, et que les centres ne sont pas du même côté, ses divers points décrivent des courbes dont les centres de courbure, au milieu de la course, forment une hyperbole équilatère (1), (2), (3). — Moyen de reconnaître si les courbes s'écartent beaucoup des arcs de cercle qui ont leurs centres sur l'hyperbole (4), (5), (6). — Construction des normales (7). — Quand une ligne droite mobile a deux points assujettis à rester sur des directrices rectilignes qui se coupent, les surfaces des ellipses décrites par les autres points sont indépendantes de l'angle des directrices. La somme ou la différence de leurs axes est une quantité constante (8), (9), (10). — Leurs foyers forment une hyperbole équilatère. Toute hyperbole équilatère est le lieu des foyers des ellipses décrites dans une infinité de systèmes de directrices rectilignes et de sécantes mobiles à points assujettis (11). — Équation polaire de la courbe que forment les sommets des ellipses (12). — Cette courbe admet quatre asymptotes qui se croisent à angle droit (13). — Détermination de la forme de la courbe; elle a deux axes, un centre et quatre sommets; elle est tangente en quatre points à l'hyperbole apollonienne des foyers (14). — Ses tangentes (15). — Ses inflexions (16). — Ses courbures et leurs variations (17), (18). — Sa transformation en un cercle et deux lignes droites (19). — Diverses propriétés de cette courbe (20). — Différentes manières de la tracer. Construction de ses tangentes (21). — Elle est du sixième degré (22). — Les tangentes des ellipses aux points qui correspondent à une même position de la ligne droite mobile ont pour enveloppe une parabole. Les foyers de ces paraboles forment un cercle (23). — Quand les directrices sont rectangulaires l'enveloppe des lignes droites mobiles est une épicycloïde storoïde (24). — Quand le rectangle de

deux diamètres d'une ellipse est égal au rectangle des axes, cette courbe peut être décrite par un point d'une ligne droite mobile dont deux points seraient assujettis sur les diamètres. Proposition inverse (25). — Constructions diverses (26). — Quand une ligne droite décrit une surface développable, et qu'elle glisse sur l'arête de rebroussement, les tangentes aux courbes que décrivent ses divers points ont pour enveloppe une parabole tangente à l'arête, et dont le paramètre est une fonction très-simple du rayon de courbure de l'arête, et du rapport des vitesses de glissement et de parcours (27).

1. Il y a quelques mois, nous avons eu à établir des transmissions horizontales de mouvement, par varlets, pour des pompes éoliennes. Chaque bielle avait 30 mètres de longueur, et, par conséquent, devait être soutenue en plusieurs points. Nous avons employé pour supports des voliges évidées; la bielle les traverse, et est soutenue par des fils de fer attachés aux sommets des ogives que forment les évidements. La flexibilité des voliges permet à la bielle de prendre successivement les diverses positions que nécessite le jeu de la machine. Deux systèmes de ce genre fonctionnent parfaitement depuis plus de six mois.

Les transmissions de mouvement par varlets étant assez fréquemment employées, nous avons cru utile de rechercher s'il est toujours nécessaire d'avoir recours à la flexibilité quand la longueur de la bielle exige des soutiens intermédiaires; en d'autres termes, si les courbes décrites par ses divers points ne peuvent pas être quelquefois considérées, avec une approximation suffisante, comme des arcs de cercle, et alors suivant quelle loi varient les rayons de ces arcs. A la suite de ce travail nous avons étudié les courbes qui sont décrites quand les directrices des points assujettis de la ligne mobile sont d'abord des lignes droites qui se coupent, puis des lignes quelconques. Nous avons réuni dans cette Note les résultats que nous avons obtenus.

2. Soient c, c', *fig.* 1, *Pl. II*, les points fixes des varlets; mm une position quelconque de la bielle; nn' la position qu'elle occupe au milieu de sa course; nous supposerons qu'elle est alors perpendiculaire aux bras cn, $c'n'$ avec lesquels elle est articulée.

Nous appelons r la longueur des bras des varlets que nous supposons égaux; α l'angle mcn d'une déviation quelconque du bras cn;

α' la déviation correspondante du bras $c'n'$; $2a$ la longueur de la bielle; θ son inclinaison sur nn' pour une déviation α du bras cn.

En comparant les projections de la bielle et des bras des varlets sur nn' et sur sa perpendiculaire AY, on obtient

$$(1) \qquad 2a(1-\cos\theta) = r\sin\alpha' - r\sin\alpha,$$

$$(2) \qquad 2a\sin\theta = r(1-\cos\alpha') + r(1-\cos\alpha).$$

Éliminant θ, on trouve entre α et α' la relation

$$(3) \quad 2a(\sin\alpha' - \sin\alpha) = 3r - 2r(\cos\alpha' + \cos\alpha) + r\cos(\alpha' + \alpha).$$

Cette formule conduit à une équation du second degré en $\sin\alpha'$ ou $\cos\alpha'$; l'une des deux racines correspond à la position $C'm'$ du bras $C'n'$. Dans les applications numériques, α' étant toujours petit et très-peu différent de α, il est plus court de le calculer par son sinus, en supposant d'abord à son cosinus la valeur $\cos\alpha$, et corrigeant ensuite l'erreur.

Examinons sur la bielle un point quelconque g, g' : nous appelons b sa distance Ag au point A, milieu de nn', et x, y ses coordonnées rectangulaires Ap, AP correspondantes à une déviation α du bras cn.

En comparant les projections sur les axes, on a

$$x = Aq - pq = a + r\sin\alpha - (a-b)\cos\theta,$$

$$x = -Aq' + pq' = -a + r\sin\alpha' + (a+b)\cos\theta,$$

$$y = AQ - PQ = r - r\cos\alpha - (a-b)\sin\theta,$$

$$y = -Q'A + PQ' = -r + r\cos\alpha' + (a+b)\sin\theta.$$

Éliminons $\cos\theta$ entre les deux premières équations, et $\sin\theta$ entre les deux autres,

$$(4) \qquad 2ax = 2ab + r(a+b)\sin\alpha + r(a-b)\sin\alpha',$$

$$(5) \qquad 2ay = 2br - r(a+b)\cos\alpha + r(a-b)\cos\alpha'.$$

Les équations (3), (4), (5) permettent de discuter la courbe décrite par le point g'.

5. Nous allons rechercher le rayon ρ du cercle osculateur à cette

courbe au point g. Pour cela, il faut connaître les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$ quand α est nul.

En différentiant les équations (4) et (5), on trouve

$$(6)\quad \begin{cases} 2a\,dx = r(a+b)\cos\alpha\,d\alpha + r(a-b)\cos\alpha'\,d\alpha', \\ 2a\,dy = r(a+b)\sin\alpha\,d\alpha - r(a-b)\sin\alpha'\,d\alpha', \end{cases}$$

$$(7)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{(a+b)\sin\alpha - (a-b)\sin\alpha'\frac{d\alpha'}{d\alpha}}{(a+b)\cos\alpha + (a-b)\cos\alpha'\frac{d\alpha'}{d\alpha}}.$$

On voit que, quand α et α' sont nuls, $\frac{dy}{dx}$ l'est également, et que, par conséquent, l'axe des abscisses est tangent à toutes les courbes décrites par les différents points de la bielle.

Cherchons maintenant la valeur du coefficient $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ qui entre dans l'équation (7). On déduit de la formule (3) :

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = \frac{2a\cos\alpha + 2r\sin\alpha - r\sin(\alpha+\alpha')}{2a\cos\alpha' - 2r\sin\alpha' + r\sin(\alpha+\alpha')}.$$

Si α est infiniment petit, α' le sera aussi, puisque ces angles sont nuls en même temps. L'expression que nous venons de trouver montre que le rapport $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ est alors égal à l'unité, et, par suite, indépendant de la grandeur des angles infiniment petits α, α'.

Pour avoir la valeur de $d\frac{dy}{dx}$ à porter dans l'expression du rayon de courbure, il faut différentier l'équation (7) et y faire ensuite α et α' nuls. On obtient immédiatement le résultat en supprimant au fur et à mesure qu'ils se présentent les termes qui contiennent en facteur $\sin\alpha$, $\sin\alpha'$, ou, d'après ce que nous venons de voir, $d\frac{d\alpha'}{d\alpha}$, et en remplaçant $\cos\alpha$, $\cos\alpha'$ et $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ par l'unité. On trouve

$$d\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}\,d\alpha.$$

Si l'on suppose α nul dans l'équation (6), on a

$$dx = r\,d\alpha.$$

Divisant ces deux équations, et portant la seconde dérivée ainsi obtenue dans l'expression connue du rayon de courbure, on obtient

$$(8) \qquad h\rho = ar.$$

On voit que la ligne des centres de courbure de toutes les courbes, pour les points qui correspondent au milieu de la course, est une hyperbole équilatère, qui a pour asymptotes les axes que nous avons choisis, et qui, comme cela devait être, passe par les points fixes des varlets.

Il est évident que tant que l'angle α sera infiniment petit, le mouvement sera le même, quelles que soient les positions que les centres des varlets occuperont sur leurs branches d'hyperbole, pourvu que leurs bras soient toujours égaux à leurs ordonnées. La proposition reste donc vraie quand les deux bras sont inégaux, mais alors il faut déterminer par une proportion la position du centre de l'hyperbole.

4. Nous allons maintenant rechercher si la courbe décrite par le point g' jusqu'à une déviation maximum α, s'éloigne beaucoup de l'arc du cercle osculateur en g.

Soient nn', *fig.* 2, la position de la bielle au milieu de sa course; mm' une quelconque de ses positions; g, g' les deux positions du point que nous considérons; D le centre d'un cercle tangent à nn' en g, et passant par g'. Le centre du cercle osculateur en g est sur Dg; il serait exactement en D si la courbe gg' se confondait avec un arc de ce cercle. Nous pourrons donc juger de l'écartement de ces lignes par la distance de ces points.

Dans le mouvement, le point B de la ligne $n'n$ s'est transporté en B'. Nous prenons pour axes la ligne $n'n$, et la perpendiculaire YG menée à une distance BG du point B égale à BB'. Nous appelons h cette distance; θ l'angle des lignes nn', mm'; x, y les coordonnées du point D, et x', y' les coordonnées variables de DT. L'équation de cette ligne déterminée par la condition d'être perpendiculaire sur le

milieu de gg' est

$$y' - \frac{1}{2}x\sin\theta = -\frac{h + x\cos\theta - x}{x\sin\theta}\left(x' - \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x\cos\theta\right).$$

Le point D étant sur cette ligne, ses coordonnées doivent satisfaire à son équation, ce qui, toutes réductions faites, donne

$$(9) \qquad xy - x^2 \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta + hx\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta - \frac{h^2}{2\sin\theta} = 0.$$

On voit que le lieu des points D est une hyperbole dont les asymptotes sont l'axe GY et la ligne EE′ qui passe par le point B, et partage l'angle θ en parties égales.

Pour comparer cette hyperbole à celle que nous avons déterminée précédemment, il faut connaître la longueur que nous avons appelée h, et la position de l'origine G sur la ligne nn'

5. On a immédiatement, *fig.* 1,

$$h = \mathrm{B}n' - \mathrm{B}m', \qquad h = \mathrm{B}m - \mathrm{B}n.$$

$$h = r\sin\alpha' - r\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}(1-\cos\alpha'), \quad h = r\sin\alpha + \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}(1-\cos\alpha),$$

$$(10) \qquad h = r\frac{\sin\alpha'(1-\cos\alpha) + \sin\alpha(1-\cos\alpha')}{2-\cos\alpha-\cos\alpha'}.$$

Nous appelons z l'abscisse AG de l'origine des coordonnées dans le calcul du n° 5. On a

$$z = n'\mathrm{B} - h - a,$$
$$z = r\sin\alpha' + r(1-\cos\alpha')\cot\theta - h - a.$$

Toutes réductions faites,

$$(11) \qquad z = a\frac{\cos\alpha - \cos\alpha'}{2-\cos\alpha-\cos\alpha'}.$$

Les numérateurs des formules (10) et (11) peuvent être rendus logarithmiques sans difficulté; leur dénominateur commun peut l'être aussi en employant comme auxiliaire l'angle θ que l'équation (1) permet de connaître par un calcul facile. Toutefois, les angles α, α'

étant à très-peu près égaux, on doit éviter d'employer le sinus de leur demi-différence. Presque toujours on pourra négliger la différence de ces angles, et l'on aura simplement

$$\sin\theta = \frac{2r}{a}\sin^2\frac{1}{2}\alpha, \quad h = r\sin\alpha, \quad z = 0.$$

6. Remplaçant l'abscisse x par sa valeur $b - z$, l'équation (9) devient

$$(12) \qquad y = (b - z - h)\tang\frac{1}{2}\theta + \frac{h^2}{2(b-z)\sin\theta}.$$

Si l'on néglige la différence de α à α', on a

$$(13) \qquad y = (b - h)\tang\frac{1}{2}\theta + \rho\cos^2\frac{1}{2}\alpha.$$

Si la supposition de l'égalité entre α et α' altère sensiblement l'hyperbole, on en sera averti, parce qu'elle ne passera plus par les centres des varlets.

Ces formules sont simples, et dans chaque cas les calculs pourront être faits en quelques instants. On verra que, quand la course est petite relativement aux bras des varlets et à la longueur de la bielle, les valeurs de ρ de l'équation (8), et celles de y des équations (12) ou (13), sont à très-peu près les mêmes entre les centres des varlets. Au delà de ces points, les différences entre les ordonnées des hyperboles croissent rapidement. Les déviations des bras des varlets ont généralement peu d'amplitude. Quand la bielle est courte, il n'est pas nécessaire de la soutenir. En faisant quelques applications numériques, nous avons reconnu que, dans presque tous les cas où la bielle a besoin de soutiens intermédiaires, on peut employer des rayons à centre fixe, et que sa flexibilité et le jeu des articulations sont suffisants pour lui laisser la liberté de mouvement nécessaire.

7. La courbe gg', *fig.* 1, est facile à tracer par points, on peut même lui mener facilement des normales. Si l'on suppose que les points m, m' soient assujettis à rester sur les tangentes mT, m'T', le point g décrira une ellipse tangente en g' à la courbe gg'. D'après un théorème de M. Chasles, la normale à l'ellipse en g' passe par le point F

où concourent les perpendiculaires CF, C'F élevées sur les directrices mT, m'T' aux points de rencontre de la sécante. La ligne Fg' sera donc normale à gg'.

On sait que si le long d'une droite on mène des perpendiculaires à une série de lignes droites convergentes, l'enveloppe de ces perpendiculaires est une parabole tangente en son sommet à la ligne donnée, et qui a pour foyer le point de convergence. Il résulte de là que les tangentes menées par les différents points de mm' aux courbes décrites par ces points, ont pour enveloppe une parabole tangente en son sommet à mm', et ayant son foyer en F.

8. Examinons maintenant le cas beaucoup plus simple où les directrices OD, OD', *fig.* 3, des points assujettis M et N sont des lignes droites. Un point quelconque g de la sécante situé à des distances m et n des points M et N, décrit une ellipse qui, rapportée aux directrices, a pour équation

$$m^2 x^2 + n^2 y^2 - 2mnxy \cos\theta = m^2 n^2. \tag{14}$$

θ est l'angle des directrices.

Si l'on appelle α l'angle que l'un quelconque des axes de la courbe fait avec l'une des directrices, on trouve

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{m \sin 2\theta}{m \cos 2\theta + n}. \tag{15}$$

Rapportant l'ellipse à ses axes par les formules ordinaires de la transformation, on a

$$\mu''^2 y'^2 + \mu'^2 x^2 = m^2 n^2, \tag{16}$$

en posant, pour abréger,

$$\mu''^2 = \frac{1}{\sin^2\theta}\left[m^2 \cos^2(\theta - \alpha) + n^2 \cos^2\alpha + 2mn \cos\alpha \cos(\theta - \alpha) \cos\theta\right], \tag{17}$$

$$\mu'^2 = \frac{1}{\sin^2\theta}\left[m^2 \sin^2(\theta - \alpha) + n^2 \sin^2\alpha - 2mn \sin\alpha \sin(\theta - \alpha) \cos\theta\right]. \tag{18}$$

Si l'on ajoute les équations (17) et (18), l'angle α disparaît spontané-

ment. Si on les retranche l'une de l'autre, on obtient une formule dont on peut facilement éloigner cet angle à l'aide de l'équation (15). Des deux équations ainsi transformées on déduit pour la valeur μ de l'une quelconque des deux quantités μ'', μ',

$$(19)\quad \mu = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{1}{2}(m^2+n^2+2mn\cos^2\theta) \pm \frac{m+n}{2}\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos 2\theta}}$$

9. Les notations que nous avons adoptées ne permettent pas de reconnaître facilement les modifications que l'ellipse éprouve quand le point g se meut sur M'N', *fig.* 3, parce que les deux paramètres varient, et que leur somme seule reste constante.

Désignons par $2a$ la longueur MN, et par b la distance du point g au point A milieu de MN. On aura

$$n = a + b, \quad m = a - b.$$

Introduisant ces nouvelles notations dans l'équation (19), on voit que la quantité soumise au grand radical est un carré parfait, et on trouve, après réductions,

$$(20)\qquad \mu = \pm\left(\frac{a}{\sin\theta} \pm \sqrt{a^2\cot^2\theta + b^2}\right).$$

Si l'on considère μ comme une grandeur absolue, on devra prendre hors de la parenthèse le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que a^2 sera plus grand ou plus petit que b^2.

La nouvelle notation introduite dans l'équation (15) donne

$$(21)\qquad \operatorname{tang} 2\alpha = \frac{a-b}{a\cot\theta + b\operatorname{tang}\theta}.$$

10. Si l'on multiplie l'une par l'autre les deux valeurs de μ, et si on les ajoute, on a

$$a^2 > b^2, \qquad a^2 < b^2,$$

$$(22)\qquad \mu''\mu' = a^2 - b^2, \qquad \mu''\mu' = b^2 - a^2.$$

$$(23)\qquad \mu'' + \mu' = \frac{2a}{\sin\theta}, \qquad \mu'' - \mu' = \frac{2a}{\sin\theta}.$$

Les équations (22) montrent que le produit $\mu''^2\mu'^2$ des coefficients des carrés des variables de l'équation (16) est toujours égal à $(a^2-b^2)^2$ ou m^2n^2, c'est-à-dire au terme constant de cette équation, et que, par conséquent, μ'' et μ' sont les longueurs des demi-axes de l'ellipse. Les équations (22) montrent ensuite que la surface de l'ellipse est indépendante de l'angle des directrices.

On voit par les équations (23) que la somme des axes est constante pour les ellipses décrites par les points d'une même sécante qui sont entre les points assujettis. Cette somme est égale à la différence des axes des ellipses décrites par des points situés hors de l'angle des directrices.

11. Si nous appelons c la distance du centre à l'un des foyers, nous aurons

$$c^2 = \mu''^2 - \mu'^2,$$

d'où

$$c^2 = \frac{4\alpha}{\sin\theta}\sqrt{a^2\cot^2\theta + b^2}. \tag{24}$$

Eliminant b par la formule (21), on trouve, après réductions,

$$c^2 = \frac{4a^2}{\sin^2\theta}\,\frac{\cos\theta}{\cos(2\alpha-\theta)}.$$

Si nous mesurons les angles à partir de la bissectrice OX de l'angle DOD′ des directrices, *fig.* 4, nous aurons, en appelant ω l'angle variable égal à $\alpha - \frac{1}{2}\theta$,

$$c^2 = \frac{4a^2}{\sin^2\theta}\,\frac{\cos\theta}{\cos 2\omega}. \tag{25}$$

Telle est l'équation polaire de la courbe des foyers. Si l'on prend pour axes les deux bissectrices OX, OY des angles des directrices, on trouve pour l'équation de cette courbe en coordonnées parallèles,

$$x^2 - y^2 = \frac{4a^2}{\sin\theta\tang\theta}. \tag{26}$$

Les foyers des ellipses forment une hyperbole équilatère F′FF″.

$F'_1 F F'_1$, *fig.* 4, dont les asymptotes zz_1, $z'z'_1$ font des angles de $45^\circ \pm \theta$ avec les directrices. L'axe transverse OX est la bissectrice de l'angle aigu des directrices.

Si l'on donne une hyperbole équilatère quelconque $x^2 - y^2 = p^2$, et qu'on demande de déterminer un système de directrices et d'écartement des points assujettis d'une ligne droite mobile, tel que l'hyperbole soit le lieu des foyers des ellipses décrites par les divers points, pour déterminer a et θ, on aura une seule équation

$$p^2 = \frac{4a^2 \cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

Il existe donc une infinité de systèmes.

On peut se donner d'une manière tout à fait arbitraire la grandeur de l'angle aigu θ ou de l'écartement $2a$, il en résultera toujours une valeur réelle pour l'autre quantité.

12. Cherchons maintenant l'équation de la courbe des sommets. Éliminant b entre les équations (20) et (24), on trouve

$$\mu = \pm\left(\frac{a}{\sin\theta} \pm \frac{c}{4a}\sin\theta\right). \tag{27}$$

On voit que les axes sont les abscisses de paraboles dont les distances focales sont les ordonnées.

Éliminant c^2 entre les équations (25) et (27), on obtient

$$\mu = \pm\frac{a}{\sin\theta}\left(1 \pm \frac{\cos\theta}{\cos 2\omega}\right).$$

Pour les grands sommets, il faut prendre le signe + dans la parenthèse et mesurer le rayon vecteur suivant l'azimut ω. Pour les petits sommets, il faut prendre le signe — dans la parenthèse et mesurer le rayon vecteur suivant l'azimut $90^\circ + \omega$, ce qui revient à changer le signe de $\cos 2\omega$, et rétablit le signe + au second terme. Enfin, comme rien ne change dans l'équation quand on y remplace ω par $180^\circ + \omega$, il est évident que le double signe hors de la parenthèse n'ajoute rien à la richesse de la formule. L'équation polaire de

la courbe des sommets est donc

$$\mu = \frac{a}{\sin\theta}\left(1 + \frac{\cos\theta}{\cos 2\omega}\right). \tag{28}$$

Si l'on appelle φ et γ les angles que la tangente au point μ, ω fait avec le rayon vecteur et avec l'axe, on trouve sans difficulté

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{2}\cot 2\omega\left(1 + \frac{\cos 2\omega}{\cos\theta}\right). \tag{29}$$

$$\operatorname{tang}\gamma = -\cot\omega\,\frac{\cos^2 2\omega - \cos\theta\cos 2\omega + 2\cos\theta}{\cos^2 2\omega - \cos\theta\cos 2\omega - 2\cos\theta}, \tag{30}$$

$\cos\theta$ est toujours positif parce que nous prenons pour axe la bissectrice de l'angle aigu des directrices.

13. Si l'on remplace dans l'équation (28) ω par $-\omega$ ou par $180^\circ \pm \omega$, la grandeur de μ ne change pas. La courbe est donc symétrique par rapport à l'axe et à sa perpendiculaire élevée par le pôle, et pour la discuter entièrement, il suffit de faire varier ω de zéro à 90 degrés.

Si l'on donne à ω une valeur très-peu différente de 45 degrés en plus ou en moins, la valeur absolue de μ sera très-grande, et φ sera très-petit; quand ω est exactement de 45 degrés, ces quantités sont l'une infinie, l'autre nulle. Il résulte de là que la courbe a deux asymptotes inclinées à 45 degrés sur l'axe, et situées de part et d'autre du centre.

Pour déterminer la position de ces asymptotes, nous allons chercher à quelle distance les points de la courbe qui ont un azimut de 45 degrés se trouvent de la ligne qui passe par le pôle, et qui a cette inclinaison. Appelons P la distance d'un point de la courbe à cette ligne; on a

$$P = \frac{a}{\sin\theta}\left(1 + \frac{\cos\theta}{\cos 2\omega}\right)\sin 2(\omega - 45^\circ).$$

Si l'on suppose à ω la valeur 45 degrés, le premier terme disparaît, le second devient indéterminé. Cherchant sa valeur par le procédé ordinaire, on trouve

$$P = \pm\frac{1}{2}a\cot\theta. \tag{31}$$

Ce calcul s'applique également à l'azimut de 135 degrés dont le double a un cosinus nul. La courbe a donc quatre asymptotes z, z_1, z', z'_1 qui se coupent à angles droits, et qui sont situées de part et d'autre et à égales distances des asymptotes zz_1, $z'z'_1$ de l'hyperbole apollonienne des foyers.

Ce résultat surprend au premier abord; il semble que les demi-axes étant mesurés sur les mêmes rayons vecteurs que les demi-distances focales, ou sur des rayons vecteurs perpendiculaires, et devenant infinis en même temps, la courbe des sommets devrait avoir les mêmes asymptotes que l'hyperbole équilatère que forment les foyers. Mais on doit remarquer que quand les distances focales deviennent infinies, les axes, abscisses de paraboles, deviennent infinis du second ordre [art. **12**, équat. (27)]. Par conséquent, le rayon vecteur qui est infiniment rapproché du point de la courbe des foyers situé à l'infini, passe à une distance finie du point correspondant de la courbe des sommets, et n'est pas asymptote de cette courbe comme de la première.

14. Pour que μ soit nul, équation (28), il faut que ω soit égal à $90^\circ \pm \frac{1}{2}\theta$; φ devient alors nul; on voit donc que la courbe admet au pôle deux tangentes perpendiculaires aux directrices.

D'après cela, et en faisant varier graduellement ω, on reconnaît que l'équation (28) représente, *fig.* 4 : 1° une hyperbole non apollonienne $S'SS''$, $S'_1S_1S''_1$ dont chaque branche admet deux asymptotes qui se coupent à angle droit, et qui sont parallèles aux asymptotes de l'autre branche; 2° une lemniscate comprise entre les tangentes PP', $P_1P'_1$, perpendiculaires aux directrices; 3° deux courbes indéfinies $s'Os''$, $s'_1Os''_1$ qui se croisent au pôle, tangentes à la lemniscate, et qui ont les mêmes asymptotes que l'hyperbole.

La courbe appartient à la famille des hyperboles redondantes; elle a deux axes, un centre et quatre sommets qui sont les sommets de l'ellipse décrite par le point de la sécante qui est placé à égale distance des points assujettis.

La lemniscate et la partie de l'hyperbole comprise entre les directrices comprennent les sommets des ellipses décrites par les points

assujettis. Les autres ellipses ont leurs petits sommets sur les courbes indéfinies tangentes à la lemniscate, et leurs grands sommets sur les parties de l'hyperbole situées hors des angles aigus des directrices.

Si l'on compare les équations (25) et (28), on verra que l'hyperbole des sommets et l'hyperbole apollonienne des foyers se rencontrent sur les directrices, en des points E situés à une distance $\frac{2a}{\sin\theta}$ du centre. Par les équations (26) et (30) on reconnaît que ces courbes ont, à leurs points de rencontre, les mêmes tangentes, qui sont inversement perpendiculaires aux directrices.

15. Si l'on examine l'équation (30), on verra que les racines du numérateur du second membre sont imaginaires; tang γ ne peut donc devenir nul que si cot ω l'est, c'est-à-dire si ω est égal à ± 90 degrés. La courbe n'admet donc de tangentes parallèles à l'axe qu'aux sommets de la lemniscate.

Tang γ devient infini quand cot ω est infini, et quand le dénominateur de l'équation (30) est nul. La courbe admet donc des tangentes perpendiculaires à l'axe aux sommets de l'hyperbole, et aux points dont les azimuts sont déterminés par

$$\cos 2\omega = \frac{1}{2}\cos\theta \pm \sqrt{\frac{1}{4}\cos^2\theta + 2\cos\theta}. \tag{32}$$

La quantité soumise au radical est essentiellement positive. Si l'on discute la seconde valeur de $\cos 2\omega$, on verra qu'elle est toujours comprise entre $-\cos\theta$ et -1, et qu'elle indique, par conséquent, quatre points situés sur la lemniscate.

Pour que la première valeur de $\cos 2\omega$ indique un angle réel, il faut qu'elle soit plus petite que l'unité, d'où l'on tire

$$\cos\theta < \frac{1}{3}, \quad \theta > 70^\circ 31' 43'',6.$$

Quand cette condition est satisfaite, la courbe a quatre nouveaux points où ses tangentes sont perpendiculaires à l'axe. Ces points sont situés dans la partie de l'hyperbole comprise entre les directrices, car la première valeur $\cos 2\omega$ donnée par l'équation (32) est toujours plus grande que $\cos\theta$.

Nous allons examiner comment varient les abscisses, afin de reconnaître la forme de la courbe lorsqu'elle admet des tangentes perpendiculaires à l'axe en d'autres points de l'hyperbole qu'aux sommets.

Soit x l'abscisse du point de la courbe dont les coordonnées sont ω et μ, on a

$$x = \frac{a}{\sin \theta}\left(\cos \omega + \frac{\cos \theta}{\cos 2\omega} \cos \omega\right)$$

Différentiant, on trouve, après réductions,

$$(33) \qquad dx = -\frac{a \sin \omega}{\sin \theta \cos^2 2\omega}(\cos^2 2\omega - \cos \theta \cos 2\omega - 2\cos \theta)\, d\omega.$$

Cette équation pourrait servir à déterminer les points où la tangente est perpendiculaire à l'axe, si l'équation (30) ne nous avait déjà permis de le faire.

Appelons ω'' l'azimut de l'un des points de la lemniscate où la tangente est perpendiculaire à l'axe; ω' l'azimut d'un point analogue de l'hyperbole; on pourra écrire

$$(34) \qquad dx = -\frac{a \sin \omega\, d\omega}{\sin \theta \cos^2 2\omega}(\cos 2\omega - \cos 2\omega')(\cos 2\omega - \cos 2\omega'')$$

Supposons à ω des valeurs très-petites: le facteur de la seconde parenthèse sera positif puisque ω'' est toujours réel, et que, par suite, $\cos 2\omega''$ sera plus petit que l'unité. D'après ce que nous avons vu, le facteur de la première parenthèse sera négatif si $\cos \theta$ est plus grand qu'un tiers; dx sera alors de même signe que $d\omega$ si l'on suppose $\sin \omega$ positif, et de signe contraire si on le suppose négatif. Dans les deux cas, l'abscisse augmentera quand le point de la courbe s'éloignera de l'axe.

Si $\cos \theta$ est plus petit qu'un tiers, ω' est réel, $\cos 2\omega'$ est plus petit que l'unité, et l'on peut toujours supposer ω assez petit pour que le facteur de la première parenthèse soit positif; l'abscisse diminuera donc pendant quelque temps quand le rayon vecteur s'éloignera de l'axe, et, par conséquent, dans la partie voisine des grands sommets la courbe sera concave vers le centre. On voit que chaque demi-

branche de l'hyperbole est obligée d'admettre une tangente perpendiculaire à l'axe pour pouvoir retourner à son asymptote.

La concavité aux grands sommets n'est sensible que quand l'angle θ est très-grand. La *fig.* 7 représente la courbe pour un angle θ de 88 degrés. Les branches indéfinies qui se croisent au centre sont sensiblement droites. Les asymptotes n'ont pas pu être tracées sur cette figure.

Avant de quitter ce sujet, nous observerons qu'on a entre ω' et ω'' la relation très-simple

$$\cos 2\omega' + \cos 2\omega'' = \cos\theta.$$

16. Il est intéressant de rechercher les points d'inflexion; la courbe en a nécessairement quand elle est concave vers le centre en ses sommets. Quand il y a inflexion, $\frac{d \operatorname{tang}\gamma}{d\omega}$ est nécessairement nul ou infini. Ce coefficient ne peut être infini que si γ est de 90 degrés, mais l'équation (34) montre qu'aux points où la tangente est perpendiculaire à l'axe, dx change de signe, et que, par conséquent, il n'y a pas inflexion. On aura donc tous les points d'inflexion en égalant $\frac{d \operatorname{tang}\gamma}{d\omega}$ à zéro.

L'équation (30) peut se mettre sous la forme

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\sin 2\omega}{1 - \cos 2\omega} \times \frac{z + 2\cos\theta}{z - 2\cos\theta}, \tag{35}$$

en faisant

$$z = \cos^2 2\omega - \cos 2\omega \cos\theta. \tag{36}$$

Différentiant cette expression, on trouve, après réductions,

$$d \operatorname{tang}\gamma = \frac{2\left(z^2 + 4\cos\theta \sin 2\omega \frac{dz}{d\omega} - 4\cos^2\theta\right)}{(1 - \cos 2\omega)(z - 2\cos\theta)^2}\, d\omega. \tag{37}$$

Égalant le numérateur à zéro, remplaçant z et $\frac{dz}{d\omega}$ par leurs valeurs en $\cos 2\omega$ déduites de l'équation (36), et éloignant une racine $\cos 2\omega = 0$ qui se présente, on a

$$\cos^3 2\omega + 6\cos\theta \cos^2 2\omega - 3\cos^2\theta \cos 2\omega - 8\cos\theta = 0. \tag{38}$$

La racine nulle qu'il a fallu supprimer vient de ce que la courbe se confond à l'infini avec le rayon vecteur incliné à 45 degrés. Le rayon de courbure devient alors infini, ce qui exige l'évanouissement de la seconde dérivée.

Si dans l'équation (38) on suppose $\cos\theta$ nul, on trouve $\omega = 45$ degrés. Les sommets des éllipses sont alors tous groupés sur les directrices inclinées à 45 degrés sur les axes. La courbe est réduite à ces deux droites qui devaient être indiquées par l'équation des inflexions, parce que leurs secondes dérivées sont nulles.

Si $\cos\theta$ varie de 0 à $\frac{1}{3}$, l'équation (38) admet une racine réelle, toujours plus grande que $\cos\theta$ et qui croît de 0 à 1. ω diminue donc de 45 degrés à 0, et la courbe a quatre points d'inflexion sur la partie de l'hyperbole comprise dans l'angle aigu des directrices.

Quand $\cos\theta$ est $\frac{1}{3}$, ω devient nul. Sur chaque branche de l'hyperbole, les trois tangentes perpendiculaires à l'axe se confondent, et ont avec la courbe, en son sommet, une tangence du troisième ordre qui exige l'évanouissement de la seconde dérivée.

Si $\cos\theta$ augmente de $\frac{1}{3}$ à 0,42466, $\cos 2\omega$ a toujours une seule valeur réelle, mais elle devient supérieure à l'unité, et, par conséquent, ω est imaginaire. Quand $\cos\theta$ a atteint la grandeur de 0,4266 [*], deux racines négatives apparaissent; elles sont d'abord égales; elles se séparent si $\cos\theta$ continue à croître, mais, ainsi que la racine positive, elles restent toujours supérieures à l'unité en grandeur absolue.

On voit donc que la courbe n'a pas de points d'inflexion quand l'angle aigu des directrices est plus petit que 70°31′43″.6, et que quand il est plus grand, elle en a quatre situés sur la partie de l'hyperbole comprise dans l'angle des directrices.

Le centre peut être considéré comme un double point d'inflexion, et cependant la formule (38) ne donne pas son azimut $90° = \frac{1}{2}\delta$. C'est

[*] Plus exactement $\sqrt{\sqrt{125} - 11}$.

qu'à vrai dire on ne trouve pas une lemniscate dans l'équation (28). Chacun des deux nœuds est lié sans inflexion avec les deux demi-branches qui s'étendent à l'infini de l'autre côté de l'axe.

17. Proposons-nous de trouver l'expression du rayon de courbure que nous désignerons par la lettre ρ.

On a

$$\rho = -\frac{(1 + \tang^2 \gamma)^{\frac{3}{2}}\, dx}{d \tang \gamma}. \tag{39}$$

D'apres l'équation (35), on peut écrire

$$\tang^2 \gamma = \frac{\cos^2 \omega\, (z + 2 \cos \theta)^2}{\sin^2 \omega\, (z - 2 \cos \theta)^2},$$

et

$$(1 + \tang^2 \gamma)^{\frac{3}{2}} = \frac{(z^2 + 4 z \cos 2\omega \cos \theta + 4 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}{\sin^3 \omega\, (z - 2 \cos \theta)^3}. \tag{40}$$

Introduisant la fonction z dans l'équation (33),

$$dx = -\frac{a \sin \omega}{\sin \theta \cos^2 2\omega}(z - 2 \cos \theta)\, d\omega. \tag{41}$$

Portant dans l'équation (39) les valeurs de $(1 + \tang^2 \gamma)^{\frac{3}{2}}$, dx et $d \tang \gamma$ des équations (40), (41) et (37), on trouve

$$\rho = \frac{a}{\sin \theta \cos^2 2\omega} \frac{(z^2 + 4 z \cos 2\omega \cos \theta + 4 \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}{\left(z^2 + 4 \cos \theta \sin 2\omega \dfrac{dz}{d\omega} - 4 \cos^2 \theta\right)}.$$

Enfin, remplaçant z et $\frac{dz}{d\omega}$ par leurs valeurs prises dans l'équation (36),

$$\rho = \frac{a\,(\cos^2 2\omega + 2 \cos \theta \cos^3 2\omega - 3 \cos^2 \theta \cos^2 2\omega + 4 \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}{\sin \theta \cos 2\omega\,(\cos^2 2\omega + 6 \cos \theta \cos^2 2\omega - 3 \cos^2 \theta \cos 2\omega - 8 \cos \theta)}. \tag{42}$$

18. Si l'on suppose dans l'équation (42) ω égal à zéro, on trouve pour expression du rayon de courbure aux grands sommets

$$\rho = a \frac{(1 + \cos \theta)^2}{\sin \theta\,(1 - 3 \cos \theta)}.$$

Si θ varie de 90 degrés à zéro, ρ, d'abord égal à a, augmente, devient infini quand $\cos\theta = \frac{1}{3}$, change de signe, diminue, et, après avoir atteint un minimum, augmente et converge vers l'infini quand θ converge vers zéro.

On trouve que la valeur du minimum de ρ correspond à

$$\cos\theta = \frac{5}{7}, \quad \theta = 44^\circ 24' 55'',1.$$

La valeur de ρ est alors, abstraction faite du signe,

$$3.67424\,a.$$

Aux petits sommets, on a

$$\rho = a\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin\theta(1+3\cos\theta)}.$$

Si θ varie de 90 degrés à zéro, ρ diminue de a à zéro.

Nous venons de voir qu'à tous les sommets le rayon de courbure est a quand θ est de 90 degrés. Si l'on examine l'équation (42), on verra que quand θ approche de 90 degrés, ρ converge vers a, quel que soit l'azimut. Si cependant ω est de ± 45 degrés, le rayon ρ reste infini.

19. Pour comprendre ce qui se passe alors, il faut se reporter à l'équation générale de la courbe (28). Si l'on y fait $\theta = 90$ degrés, elle se divise en deux :

$$\cos 2\omega = 0, \quad \mu = a.$$

La première représente les directrices qui deviennent les axes de toutes les ellipses. La seconde indique un cercle qui est décrit par le point de la ligne droite mobile situé à égale distance des points assujettis. Tous les points de ce cercle étant des sommets, la formule (28) devait donner son équation.

La *fig.* 7 et l'équation (42) montrent comment la courbe se transforme en un cercle et deux lignes droites. La partie de l'hyperbole voisine de l'axe devient concave vers le centre, et plus θ augmente,

plus elle se rapproche de la forme circulaire. Cependant la lemniscate s'enfle, et les parties voisines de ses sommets affectent aussi, elles, la forme circulaire. Les autres parties de la courbe s'aplatissent contre leurs asymptotes qui se rapprochent du centre. Quand θ arrive à 90 degrés, les quatre quarts de cercle qui se préparaient aux sommets de l'hyperbole et de la lemniscate se réunissent [*], et les autres parties de la courbe se confondent avec les asymptotes, qui elles-mêmes se superposent aux rayons vecteurs inclinés à 45 degrés.

On doit remarquer que, dans l'intérieur du cercle, les droites sont entièrement formées de parties empruntées à la courbe des petits sommets; c'est que si le petit axe de l'ellipse passe par tous les états de grandeur, suivant la position du point décrivant sur la droite mobile, le grand axe a un minimum $2a$ $\left(\text{généralement } 2a \cot \frac{1}{2}\theta\right)$ qu'il ne peut pas franchir.

20. Nous avons étudié avec soin la forme de la courbe (28), et nous nous sommes attaché à reconnaître les modifications qu'elle éprouve suivant les variations de l'angle θ. Cette étude était nécessaire pour comprendre comment les ellipses se disposent et se groupent. On peut faire sur la courbe (28) beaucoup d'autres spéculations intéressantes; nous en indiquerons quelques-unes.

A. L'angle φ que forme le rayon vecteur avec la tangente est nul aux points dont les azimuts sont $90^\circ \pm 45^\circ$ et $90^\circ \pm \frac{1}{2}\theta$; entre ces points, il s'en trouve nécessairement un où l'angle φ atteint un maximum. On trouve que l'azimut de ce point est donné par

$$\cos^3 2\omega - 2\cos 2\omega - \cos\theta = 0,$$

d'où l'on tire

$$\cos 2\omega = -2\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\left(30^\circ - \frac{1}{3}\arccos\sqrt{\frac{27}{32}}\cos\theta\right).$$

---

[*] L'équation (32) montre que quand θ approche de 90 degrés, les rayons vecteurs des deux points qui admettent des tangentes perpendiculaires à l'axe se rapprochent, et que leurs azimuts convergent vers 45 degrés; ils semblent atteindre cette limite quand l'angle θ est droit, mais alors les deux tangentes perpendiculaires à l'axe disparaissent, comme on le voit par l'équation (30).

Si θ varie de 90 degrés à zéro, ω augmente de 45° à $64^\circ\, 5'\, 13'',6$.

B. Si l'on donne l'inclinaison γ d'une tangente, on pourra calculer, à l'aide de l'équation (30), le point de la courbe où la tangence a lieu. On est conduit à une équation du cinquième degré qui se simplifie quelquefois. Ainsi les azimuts des points où la tangente est inclinée de 45 degrés sur l'axe, sont donnés par la formule

$$\cos^3 2\omega - 2\cos\theta\cos^2 2\omega + \cos^2\theta\cos 2\omega + 4\cos\theta = 0.$$

Cette équation n'a qu'une racine réelle qui est comprise entre $-\cos\theta$ et -1 et qui, par conséquent, indique quatre points situés sur la lemniscate.

C. Les rayons de courbure au pôle ont une expression très-simple. Si, dans l'équation (42), on suppose

$$\cos 2\omega = -\cos\theta,$$

on trouve

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta}.$$

Si l'on prend sur chaque directrice des points G qui soient à une distance a du pôle, et que, par ces points, on lui élève des perpendiculaires jusqu'à l'autre directrice, les points de rencontre Q seront les centres de courbure. Les points G sont évidemment sur l'ellipse décrite par le point de la sécante qui est à égales distances des deux points assujettis.

D. Si, après avoir tracé la courbe (28), on augmente tous les rayons vecteurs d'une même quantité, on aura une courbe absolument de même nature, et qui correspondra à des directrices plus rapprochées des asymptotes.

Si l'on diminuait les rayons vecteurs d'une quantité plus petite que $a \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta$ ou plus grande que $a \cot \frac{1}{2}\theta$, on trouverait encore une courbe de même nature. Pour une diminution comprise entre ces limites, on a une courbe du même genre, mais d'une forme altérée et qui a perdu la belle propriété d'être le lieu des sommets des ellipses décrites par les divers points d'une ligne droite mobile.

E. Si du pôle comme centre on décrit un cercle, il coupera généralement la courbe (28) en huit points qui appartiennent à deux systèmes. La somme des sécantes des doubles des azimuts de deux points pris dans les deux systèmes est indépendante du rayon du cercle.

F. La courbe représentée par l'équation (28) ne convient qu'à un seul système de directrices et d'écartement de points assujettis. La même hyperbole de foyers correspond donc à une infinité de courbes de sommets; elle est l'enveloppe de ces courbes.

21. L'équation (28) permet de tracer facilement la courbe. Pour cela, du point O, *fig.* 5, intersection des directrices, tracez un cercle GQO′ d'un rayon égal à $\frac{a}{\sin \theta}$, et portez sur la bissectrice OY de l'angle obtus des directrices, une longueur OH égale au cosinus de θ mesuré dans le cercle OG; tracez deux rayons vecteurs rectangulaires OK, OK′ dont le premier fasse avec OX un angle de moins de 45 degrés; abaissez GQ perpendiculaire sur OK, puis QB perpendiculaire sur OX; menez GR parallèle à la ligne qui joindrait les points B et H; enfin, portez la longueur OR de c en m, et de c' en m': les points m, m' seront sur la courbe. Quand le rayon vecteur OK aura décrit un angle de 45 degrés, on aura tracé un quart de la courbe; les trois autres quarts sont symétriques.

Nous indiquerons une autre construction : les cosinus des angles 2ω se mesurent naturellement sur l'axe OX. Si nous portons les rayons vecteurs en ordonnées perpendiculaires à cet axe, l'équation (28) représentera une hyperbole apollonienne équilatère dont les asymptotes seront O′X′ et O′Y. La grandeur de cette hyperbole dépend du rayon du cercle dans lequel on mesure les cosinus. Nous supposerons que ce soit dans le cercle dont le rayon est OO′ ou $\frac{a}{\sin \theta}$. L'hyperbole est facile à construire. Le rayon vecteur Om à porter dans la direction OK, sera l'ordonnée BD correspondante à l'arc double et prolongée jusqu'à l'hyperbole.

Des équations (28) et (29) on déduit

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\mu}{2\left(\mu - \frac{a}{\sin \theta}\right)} \cot 2\omega.$$

Om, mc et O'V sont μ, $\mu - \frac{a}{\sin\theta}$ et $\cot 2\omega$. On peut donc trouver φ par une construction très-simple.

22. L'équation de la courbe en coordonnées paralleles n'offre rien de remarquable ; elle est du sixième degré,

$$(43) \qquad (x^2 - y^2)(x^4 - y^4) = a^2\left(x^2 \cot\frac{1}{2}\theta - y^2 \tang\frac{1}{2}\theta\right)^2.$$

Les axes sont les bissectrices OX, OY, *fig.* 4, des angles des directrices.

Si l'on recherche les asymptotes, on trouve pour leur équation

$$y = \pm x \pm \frac{a\cot\theta}{\sqrt{2}}.$$

Il est facile de voir que ces droites sont précisement celles que nous avons trouvées au n° **14**.

Si θ est 90 degrés, l'équation (43) donne, comme l'équation (28), deux lignes droites inclinées à 45 degrés sur les axes, et le cercle qui a son centre à l'origine, et dont le rayon est a.

23. Nous avons vu, n° 7, que les tangentes de toutes les ellipses, aux points qui correspondent à une même position de la sécante, ont pour enveloppe une parabole au foyer de laquelle concourent les normales des différentes ellipses. On détermine facilement ce foyer en élevant des perpendiculaires aux directrices, par les points où la ligne mobile les coupe. On reconnaît ensuite sans difficulté que lorsque la sécante se meut, et que ses points décrivent des ellipses, le foyer de la parabole enveloppe des tangentes décrit un cercle dont le centre est au point O, intersection des directrices, *fig.* 4, et qui a pour rayon $\frac{2a}{\sin\theta}$. Ce cercle passe par les points de contact E des hyperboles, n° **14**.

24. Il est facile de trouver l'équation de l'enveloppe des sécantes mobiles, lorsque les directrices sont rectangulaires.

Soit

$$u = c$$

l'équation de cette enveloppe, rapportée aux directrices. u est une fonction nécessairement symétrique des coordonnées variables x et y d'un point de l'enveloppe; c est une quantité constante.

Les directrices faisant partie des sécantes mobiles doivent être tangentes à la courbe; ce qui exige que

$$(44)\quad \begin{cases} \text{quand } x = 0, \text{ on ait } \dfrac{du}{dy} = 0 \text{ ou } \dfrac{du}{dx} = \infty : \\ \text{quand } y = 0, \text{ on ait } \dfrac{du}{dx} = 0 \text{ ou } \dfrac{du}{dy} = \infty . \end{cases}$$

L'équation de l'une quelconque des lignes mobiles est

$$(x' - x)\frac{du}{dx} + (y' - y)\frac{du}{dy} = 0.$$

La partie comprise entre les axes étant égale à $2a$, on doit écrire

$$(45)\quad \left(\frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y\right)^2 \left[\frac{1}{\left(\frac{du}{dy}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{du}{dx}\right)^2}\right] = (2a)^2.$$

Le premier facteur sera constant, si la fonction symétrique u est un binôme dont chaque terme ne contienne qu'une des variables à un exposant quelconque. Le second facteur sera également constant, si cet exposant est tel, qu'il soit, ou exactement reproduit, ou réduit à zéro par la différentiation, le renversement en dénominateur et l'élévation au carré. Dans le premier cas, en effet, ce facteur est la fonction u; dans le second, les variables disparaissent.

Nous sommes ainsi conduit aux exposants $\frac{2}{3}$ et 1. Le second ne satisfait pas aux conditions (39), et doit être rejeté; le premier leur satisfait pleinement, et doit, par conséquent, être admis.

Le premier membre de l'équation (40) devient le cube de u, si l'on suppose que dans cette fonction les coefficients des variables, qui sont nécessairement égaux, soient réduits à l'unité. La racine cubique du second membre $(2a)^2$ sera donc égale au terme constant c. Nous obtenons ainsi :

$$y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}.$$

Cette équation représente, comme on sait, une épicycloïde décrite par un cercle dont le diamètre est a dans un cercle d'un diamètre quadruple.

On avait déjà remarqué la propriété des tangentes de cette courbe de couper les axes en des points dont la distance est toujours égale au diamètre du cercle régénérateur. Cette propriété donne probablement le moyen le plus simple de la tracer.

25. Nous allons maintenant examiner, dans une même ellipse, les différents systèmes de directrices qu'elle peut admettre. Pour simplifier le langage, nous dirons que deux diamètres sont correspondants, quand l'ellipse pourra être décrite par un point d'une sécante qui aurait sur eux deux points assujettis.

Nous reprenons nos anciennes notations de l'article 9 : m et n sont les distances du point décrivant aux points assujettis. Ces deux quantités sont positives, quand le point décrivant est entre les points assujettis; quand il n'y est pas, l'une des deux est nécessairement négative et l'autre positive. Les grandeurs absolues de m et n sont évidemment les longueurs des demi-diamètres des directrices.

Les équations (22) et (23) deviennent :

$$nm > 0, \qquad nm < 0,$$

$$(22\ bis) \qquad nm = \mu''\mu', \qquad nm = -\mu'\mu',$$

$$(23\ bis) \qquad \sin\theta = \frac{m+n}{\mu''+\mu'}, \quad \sin\theta = \frac{m+n}{\mu''-\mu'}.$$

La formule (22 *bis*) montre que, dans une ellipse, le rectangle de deux diamètres correspondants est toujours égal au rectangle des axes.

Si l'on donne l'angle qu'un diamètre fait avec le grand axe, il sera facile d'avoir sa demi-longueur n, qui sera comprise entre μ'' et μ'; on calculera par les formules (22 *bis*) la demi-longueur m du diamètre correspondant, on trouvera ensuite, par les équations (23 *bis*), deux sinus qui seront toujours plus petits que l'unité, ainsi qu'on le reconnaît en discutant leurs expressions. L'angle θ aura donc toujours deux valeurs réelles, et l'on pourra placer dans deux positions le demi-diamètre m. Tout diamètre a donc deux diamètres correspondants, de même lon-

gueur, et, par conséquent, placés d'une manière symétrique par rapport aux axes. Avec l'un de ces diamètres, le point décrivant est entre les points assujettis; avec l'autre, il est en dehors d'eux. Deux diamètres placés d'une manière symétrique par rapport aux axes, ont évidemment les mêmes correspondants. Enfin, comme un diamètre de longueur donnée ne peut recevoir dans une ellipse que deux positions, il est manifeste que deux diamètres dont le rectangle est égal à celui des axes sont correspondants.

Si le diamètre donné est un axe, les deux diamètres correspondants se réunissent dans le second axe.

Si le diamètre donné est moyen proportionnel entre les axes, il n'a qu'un correspondant, et l'ellipse ne peut être décrite que par un point compris entre les deux assujettis. L'autre mode de génération disparaît, parce que la seconde des valeurs de θ devient nulle; le diamètre se confond alors avec son second correspondant, et les deux points assujettis de la sécante se confondant également, ses diverses positions ne sont plus déterminées.

Si l'ellipse est un cercle, les deux quantités m et n sont égales; la première valeur de θ est de 90 degrés. Le cercle peut donc être décrit par un point d'une sécante placée à égales distances de deux autres assujettis à glisser sur des droites rectangulaires. La seconde valeur de θ est arbitraire; les deux points assujettis se confondent, et, pour décrire le cercle, il suffit de les retenir au centre : ce qui a lieu, si on les oblige à rester sur le diamètre donné, et sur l'un quelconque des autres.

26. Quand une ellipse est tracée, on trouve les diamètres correspondants d'un diamètre donné par une quatrième proportionnelle et un arc de cercle.

Tout le monde connaît, pour le cas où l'ellipse n'est pas tracée, une construction qui consiste à décrire un cercle d'un diamètre égal à la somme des demi-axes, ayant son centre sur le grand axe et tangent au petit. Les cordes de ce cercle qui passent par les extrémités du grand axe de l'ellipse, rencontrent la circonférence en des points qui, deux à deux, appartiennent à des directions de diamètres correspondants.

Cette construction élégante a l'inconvénient de s'étendre loin de

l'ellipse, et d'exiger souvent une réduction d'échelle. Elle ne donne d'ailleurs que la direction du second diamètre, et si l'on veut tracer l'ellipse, il faut ensuite chercher les longueurs des deux diamètres. Il est plus simple de chercher d'abord ces longueurs, la direction du second diamètre s'en déduit très-simplement.

Soient AA′, BB′, *fig.* 6, les axes d'une ellipse, et VV′ un diamètre quelconque. Des sommets A′ et B′ nous abaissons les perpendiculaires A′q, B′p sur ce diamètre; nous portons A′q de p en q'; nous joignons B′q', et nous prenons sur cette ligne une longueur B′G égale à CA; nous menons GK parallèle au diamètre donné VV′; nous rabattons B′q' sur B′B, et nous prenons pH égal à Kq''; nous menons D′D parallèle à V′V, et du centre C, avec un rayon égal à la différence des demi-axes, nous décrivons un arc de cercle qui coupe D′D en F; nous traçons SS′ par C et F, et enfin T′T et U′U dans des positions symétriques par rapport aux axes, aux lignes S′S et V′V.

Si l'on prend sur deux lignes droites Mg, M′g' égaux à B′K, et Ng, N′g' égaux à B′q', l'ellipse pourra être décrite par le point g, en faisant glisser le point M sur S′S et le point N sur VV′, ou le point M sur T′T et le point N sur UU′; elle le sera encore par le point g', si l'on fait glisser M′ sur TT′ et N′ sur VV′, ou M′ sur SS′ et N′ sur UU′.

Pour légitimer cette construction, il suffit de remarquer qu'en éliminant n et φ entre les équations (22 *bis*), (23 *bis*) et (15 *bis*), ou en calculant directement m d'après les données de l'ellipse et l'inclinaison α de ce diamètre sur l'axe, on trouve

$$m = \sqrt{\mu''^2 \sin^2\alpha + \mu'^2 \cos^2\alpha},$$

B′q' est évidemment m, et B′K, n. On voit ensuite, d'après l'équation (24 *bis*), que SCV est égal à la seconde valeur de φ.

Les diamètres correspondants permettent quelquefois de tracer rapidement des arcs d'une grande ellipse quand les autres procédés graphiques sont inadmissibles. Ce moyen, du reste, ne peut pas être toujours employé, et quand les diamètres sont très-grands il faut en venir à calculer des ordonnées sur une corde.

27. Nous avons vu, n° **7**, que quand une ligne droite se meut

dans un plan, les tangentes à toutes les courbes que décrivent ses points ont constamment pour enveloppe une parabole. On peut facilement démontrer ce théorème dans toute sa généralité, et reconnaître quel est le paramètre de la parabole.

Supposons qu'une sécante gg'. *fig.* 2, se meuve dans le plan de deux lignes Bn, Bm, de manière que la différence des segments de ces lignes (Bg' — Bg) reste toujours égale à une quantité donnée h. L'enveloppe de cette ligne mobile rapportée aux directrices Bn, Bm, a pour équation

$$x^2 + y^2 + 2xy - 2hy + 2hx + h^2 = 0.$$

Si l'on rapporte cette parabole à la bissectrice BE de l'angle θ des directrices, et à sa perpendiculaire BY′, on trouve

$$x^2 - 2h\frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta} + h^2\cos^2\theta = 0.$$

Si h et θ deviennent infiniment petits dh et $d\theta$, la parabole a pour équation

$$x^2 = 4\frac{dh}{d\theta}y. \tag{46}$$

La ligne gg' est alors une tangente à la courbe décrite par le point g; on voit que l'enveloppe de ces tangentes est une parabole. Cette proposition est vraie quelle que soit la loi du mouvement de gg', pourvu que deux positions infiniment voisines se coupent toujours, et que cette ligne glisse sur son enveloppe. S'il n'y avait pas glissement, $\frac{dh}{d\theta}$ serait nul, et y serait infini pour toute valeur de x. Les courbes seraient alors des développantes, et toutes leurs tangentes seraient parallèles et perpendiculaires à gg'.

Appelons ds l'élément de l'enveloppe qui est parcouru par le point de tangence de la génératrice pendant qu'elle-même glisse de la quantité dh, et R le rayon de courbure de cette enveloppe au point de contact avec la génératrice, on aura

$$ds = \mathrm{R}\,d\theta$$

et

$$x^2 = 4R\frac{dh}{ds}y. \tag{47}$$

Ainsi donc, si une ligne droite décrit une surface developpable, et qu'en même temps elle glisse sur l'arête de rebroussement suivant une loi quelconque, les tangentes menées le long d'une génératrice aux courbes décrites par ses divers points dans leur double mouvement, ont pour enveloppe une parabole tangente en son sommet à la génératrice et à l'arête de rebroussement, comprise dans le plan tangent à la surface, et dont le paramètre est égal à quatre fois le rayon de courbure de l'arête de rebroussement au point de contact, multiplié par le rapport des vitesses du glissement et du parcours sur l'arête.

On peut ajouter, d'après une propriété connue de la parabole, que les normales des courbes décrites aux points qui correspondent à une même position de la génératrice, concourent toutes au foyer de la parabole enveloppe des tangentes.

Cette proposition donne un moyen généralement facile de mener des tangentes aux courbes tracées sur des surfaces développables. Si la surface est un cône, il faut recourir à l'équation (46), car la formule (47) donne un paramètre indéterminé.

On peut, par ce procédé, résoudre le problème de Garbinski sur la tangente à la spirale conique (*Annales de Mathématiques* de Gergonne, tome XVI, page 167); il suffit de construire et de rabattre le plan tangent au cône, d'y placer le foyer de la parabole, ce qui est facile, car le rapport $\frac{dh}{d\theta}$ est constant et nécessairement connu, enfin de tracer la normale et la tangente, et de relever le plan.

Saint-Nazaire, le 18 août 1849.

Addition.

SOMMAIRE. — Si les directrices rectilignes ne sont pas situées dans un même plan, les courbes décrites sont encore des ellipses pour lesquelles la somme ou la différence des axes est constante, et dont les surfaces sont indépendantes de l'angle des direc

trices (28). — La courbe formée par les foyers est l'intersection d'un cylindre hyperbolique avec un paraboloïde hyperbolique (29). — La ligne mobile engendre un hyperboloïde gauche du quatrième degré. Les asymptotes des hyperboles que donnent les sections faites par l'axe, forment une surface gauche du quatrième degré. Équations de la courbe que forment les sommets des ellipses (30). — Quand les directrices sont rectangulaires, la courbe des foyers se transforme en deux paraboles, et la courbe des sommets en quatre lignes droites (31).

28. Si les directrices sont des droites non situées dans un même plan, on peut, pour chacune d'elles, mener un plan parallèle à l'autre : on aura ainsi deux plans parallèles et que nous supposerons horizontaux.

La longueur de la partie de la droite mobile, interceptée entre ces deux plans, est constante d'après la loi même de son mouvement ; cette ligne reste donc toujours également inclinée à l'horizon et chacun de ses points se meut dans un plan horizontal.

Prenons pour plan de projection un plan horizontal quelconque, celui qui est à égales distances des deux directrices. Leur commune perpendiculaire sera représentée par un point, et elles-mêmes par deux droites qui se croiseront en ce point et sur lesquelles glisseront les projections des points assujettis. La distance de ces projections sera constante, puisque l'inclinaison de la ligne mobile ne varie pas ; les projections des courbes décrites par ses différents points seront donc des ellipses concentriques qui jouiront des diverses propriétés que nous avons constatées au n° 10. Mais les courbes sont dans des plans horizontaux, et, par conséquent, se projettent en vraie grandeur ; elles sont donc aussi des ellipses qui ont leurs centres sur la commune perpendiculaire des deux directrices, et qui jouissent des propriétés reconnues, c'est-à-dire que la somme ou la différence de leurs axes est constante, et que leurs surfaces sont indépendantes de l'angle des directrices.

Nous prenons pour axe des z la commune perpendiculaire des directrices, et pour axes des x et des y les bissectrices des angles aigu et obtus des projections horizontales des directrices. Nous conservons les notations adoptées, et nous appelons σ l'inclinaison de la ligne mobile sur l'horizon ; en d'autres termes, nous désignons par

$2a \sin \sigma$ la distance des deux directrices mesurée sur leur commune perpendiculaire.

Si nous remplaçons a et b par $a \cos \sigma$ et $b \cos \sigma$ dans les nos 9, 10 et suivants, les équations représenteront toutes les circonstances des projections horizontales des différentes courbes. Les courbes des sommets et des foyers sont donc sur des cylindres des deuxième et sixième degrés dont les équations nous sont connues.

29. Pour trouver une autre surface qui contienne ces courbes, nous observerons que chaque ellipse étant horizontale, ses foyers et ses sommets ont la même ordonnée $b \sin \sigma$. On déduit de l'équation (21), en se rappelant que nous avons appelé ω la différence $\alpha - \frac{\theta}{2}$,

$$b = a \cot \theta \operatorname{tang} 2\omega \text{ [*]},$$

on a donc

$$z = a \sin \sigma \cot \theta \operatorname{tang} 2\omega. \tag{48}$$

Cette équation, jointe aux précédentes, détermine complétement les courbes. Si on la transforme en coordonnées parallèles, on a

$$y^2 z - x^2 z + 2axy \cot \theta \sin \sigma = 0. \tag{49}$$

Les courbes des foyers et des sommets peuvent donc être obtenues par l'intersection d'une surface du troisième degré avec des cylindres des deuxième et sixième.

L'équation du premier de ces cylindres est

$$x^2 - y^2 = \frac{4a^2 \cos^2 \sigma}{\sin \theta \operatorname{tang} \theta}. \tag{26 bis}$$

Combinant cette équation avec l'équation (49), on obtient la formule

$$2az \cos \sigma - xy \operatorname{tang} \sigma \sin \theta = 0, \tag{50}$$

---

[*] Cette équation permet de trouver, par une construction très-simple, les directions des axes d'une ellipse décrite par un point donné sur une ligne mobile

qui représente un paraboloïde hyperbolique. La courbe des foyers peut donc être obtenue très-facilement par l'intersection de deux surfaces réglées du deuxième degré.

30. Cherchons maintenant l'équation de la surface engendrée par la ligne mobile. Les équations des directrices sont

$$\begin{cases} y - x \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta = 0, \\ z - a \sin\sigma = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y + x \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta = 0, \\ z + a \sin\sigma = 0. \end{cases}$$

Si l'on pose pour équations de la génératrice dans l'une quelconque de ses positions,

$$x = pz + q,$$
$$y = p'z + q',$$

en exprimant que cette ligne rencontre les deux directrices, et que la distance des points de rencontre est $2a$, on trouve pour équations de condition

$$q = pa \sin\sigma \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta,$$

$$q = p'a \sin\sigma \cot \tfrac{1}{2}\theta,$$

$$p^2 + p'^2 = \cot^2\sigma.$$

Éliminant les coefficients p, q, p' et q', on obtient

$$(51) \quad \begin{cases} \left(xz - ay \sin\sigma \cot \frac{1}{2}\theta\right)^2 + \left(yz - ax \sin\sigma \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta\right)^2 \\ \qquad = (z^2 - a^2 \sin^2\sigma)^2 \cot^2\sigma. \end{cases}$$

Cette équation représente un hyperboloïde gauche du quatrième degré, dont, ainsi que cela devait être, les sections horizontales sont toutes des ellipses. Les sections faites par l'axe des z sont des hyperboles du quatrième degré dont les asymptotes font, avec le plan horizontal, des angles égaux à σ. Ces asymptotes forment une surface gauche du quatrième degré.

On peut déterminer la courbe des sommets par les équations (49) et (51) des troisième et quatrième degrés.

31. Quand les directrices sont rectangulaires, les cylindres verticaux qui contiennent les courbes des foyers et des sommets se réduisent à deux plans qui passent par l'axe des z, et sont inclinés à 45 degrés sur les plans verticaux coordonnés. Pour avoir les équations des courbes dans ces plans, il faut supposer dans les équations (50) et (51)

$$\theta = 90 \text{ degrés} \quad \text{et} \quad x = \pm y = \pm \frac{\mu}{\sqrt{2}},$$

en appelant μ l'abscisse horizontale comptée à partir de l'origine.

On trouve que les courbes des foyers et des sommets ont pour équations :

Dans le premier plan,

$$\mu^2 = 4az \cos\sigma \cot\sigma,$$

$$z = \pm \mu \operatorname{tang}\sigma - a \sin\sigma;$$

dans le second plan,

$$\mu^2 = -4az \cos\sigma \cot\sigma,$$

$$z = \pm \mu \operatorname{tang}\sigma + a \sin\sigma.$$

On voit que la courbe des foyers forme deux paraboles dont les sommets sont à l'origine.

Chaque ellipse a ses deux foyers sur la même parabole.

La courbe des sommets se transforme en quatre lignes droites qui sont des génératrices de la surface (51); elles sont deux à deux tangentes aux parallèles des foyers dans les points où ces courbes rencontrent les directrices. Chaque ellipse a un sommet sur chacune des quatre lignes droites.

La *fig.* 8 représente un plan vertical mené par l'une des deux directrices DD'; l'autre directrice se projette en un point O'. Les lignes SS', $S_1S'_1$ qui passent par ce point O'' et qui forment avec DD' les angles $\pm\sigma$ contiennent les grands sommets au-dessus de l'horizontale Oμ et

les petits sommets au-dessous. Les foyers des ellipses situées au-dessus de $O\mu$ sont sur la parabole FOF′ dont le foyer f se trouve par la construction du triangle isocèle $O''D'f$. L'autre parabole a également son sommet en O; son foyer est f'; elle se projette sur Oz' ainsi que les deux droites des sommets qui se croisent en O′. La surface gauche décrite par la droite mobile se projette tout entière sur l'espace angulaire $SO''S_1$, $S'O''S'_1$. Les deux paraboles étant tangentes au plan horizontal de projection, en un même point, les deux foyers de l'ellipse que contient ce plan se confondent en un seul. On trouve, en effet, que l'équation (51) donne un cercle quand on y suppose $\theta = 90$ degrés et $z = 0$. Ce résultat s'accorde parfaitement avec ceux du n° **19**.

Saint-Nazaire, le 11 septembre 1849.

Démonstration élémentaire d'une proposition relative aux diviseurs de $x^2 + Ay^2$;

PAR M. HERMITE.

Je dis que p désignant un diviseur de la formule $x^2 + Ay^2$, une puissance convenablement déterminée de p pourra toujours être représentée par cette forme, c'est-à-dire qu'on pourra toujours faire

$$p^\alpha = X^2 + AY^2.$$

Soit pour une valeur entière quelconque de μ, z_μ une valeur de $\sqrt{-A}$ (mod. p^μ): l'expression

$$(xp^\mu - y z_\mu)^2 + Ay^2$$

représentera toujours des nombres entiers divisibles par p^μ, et je dis en premier lieu qu'on pourra toujours déterminer x et y de telle manière qu'on ait

$$\frac{(xp^\mu - y z_\mu)^2 + Ay^2}{p^\mu} < 2\sqrt{A}.$$

En effet, il suffira de développer en fraction continue $\frac{z_\mu}{p^\mu}$, jusqu'à ce qu'on arrive à une réduite telle que son dénominateur étant moindre que $\frac{p^{\frac{1}{2}\mu}}{\sqrt[4]{A}}$, cette limite soit atteinte ou surpassée par le dénominateur de la réduite suivante. Les valeurs de x et y seront respectivement le numérateur et le dénominateur de cette réduite. Cela posé, on voit que, par une infinité de valeurs de μ, on aura la représentation d'un même multiple de p^μ par la forme $x^2 + Ay^2$. Ainsi, en nommant k

ce multiple, on trouvera nécessairement deux équations

$$kp^{\mu} = x^2 + Ay^2,$$
$$kp^{\mu'} = x'^2 + Ay'^2,$$

dans lesquelles $x - x'$ et $y - y'$ seront à la fois divisibles par k. Sous cette condition il vient, en multipliant membre à membre les deux équations précédentes,

$$k^2 . p^{\mu+\mu'} = (xx' + Ayy')^2 + A(xy' - yx')^2.$$

Or $xy' - yx'$ est divisible par k, puisqu'on a

$$x \equiv x', \quad y \equiv y' \pmod{k};$$

donc il en est de même de $xx' + Ayy'$, et finalement la puissance $\mu + \mu'$ de p se trouve bien représentée par la forme $x^2 + Ay^2$.

Il est facile de voir qu'une démonstration toute semblable s'applique au cas de A négatif; on a, au reste, un théorème plus général et dont voici l'énoncé :

« p étant un diviseur de la norme d'un nombre complexe quel-
» conque, formé avec les racines $m^{ièmes}$ de l'unité, on pourra tou-
» jours déterminer une puissance entière de p, qui soit représentée
» précisément par cette norme. »

FIN DU QUATORZIÈME VOLUME.

Note sur les polyèdres symétriques de la géométrie, par M. A. Bravais.

Fig. 1.

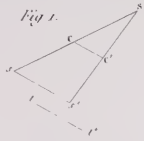


Fig. 2.

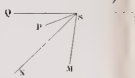
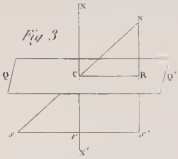


Fig. 3



Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique, par M. A. Bravais.

Fig. 1.

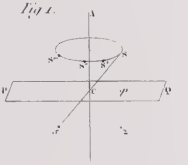


Fig. 2.

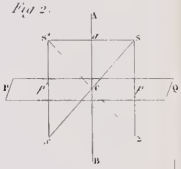


Fig. 3.

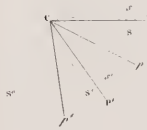


Fig. 4.

Fig. 5

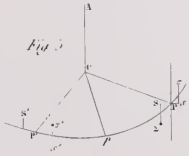


Fig. 6.

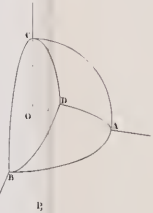


Fig. 7.

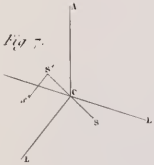


Fig. 8.

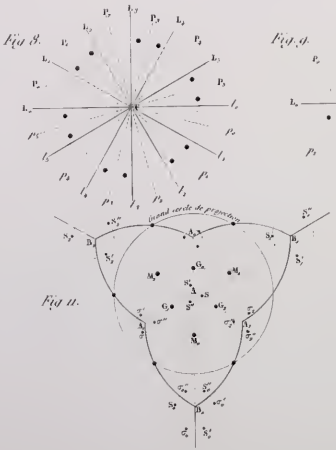


Fig. 9.

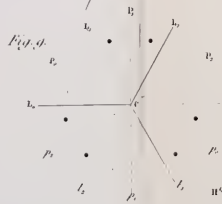


Fig. 10.

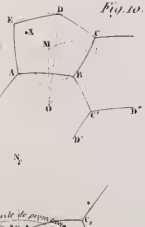
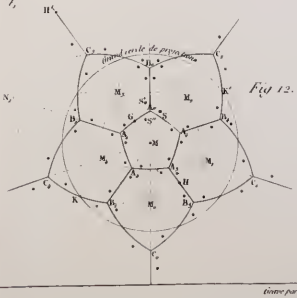


Fig. 11.

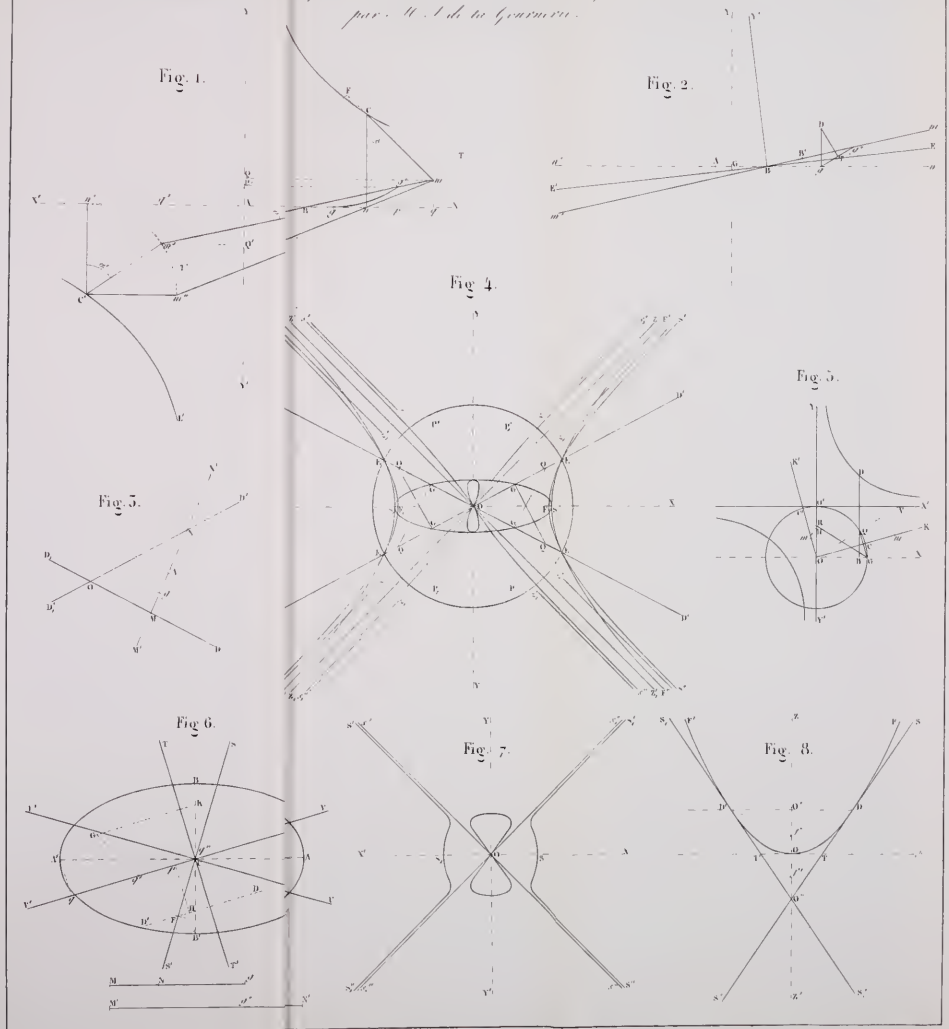
Fig. 12.



Gravé par E. Kierzkowski

Note sur les courbes décrites par les centres d'une ligne droite mobile dont deux points sont astreints à rester sur des directrices données,

par M. A. de la Gournerie.



Gravé par L. Sonnet

QA
1
J684
t.14

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY